Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5 (Präsenzaufgaben)

Aufgabe 1:

a) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) := \,(z+\bar{z})^2 \,- 4\,(\mathrm{Im}\,(z))^2 \,+\, i \cdot k \cdot \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z)$$

in jedem Punkt aus $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

b) Gegeben ist die Funktion

$$u(x+iy) = \mathrm{Re}\,(f(x+iy)) = x^2 + 2xy - y^2\,.$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion u harmonisch ist.

ii) Konstruieren Sie zu u eine konjugiert harmonische Funktion v, das heißt eine Funktion v, so dass $f = u + iv$ komplex differenzierbar ist.

iii) Kür: Können Sie die Funktion $f(z) = u(z) + iv(z)$ ohne explizite Verwendung von x und y, als Funktion von z angeben?

Aufgabe 2: Es sei $z = re^{i\phi}, r > 0$ und $f(z) = u(r,\phi) + iv(r,\phi)$. Dann lauten die Cauchy - Riemannschen-Differentialgleichungen

$$\boxed{u_r = \frac{1}{r}\,v_\phi\,, \qquad v_r = -\frac{1}{r}\,u_\phi}$$

(Nachweis: Kettenregel).

a) Sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl. Weiterhin sei die Funktion g gegeben durch:

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,,\ g(z) := |z|^2 + \frac{a^2}{|z|^2}\,.$$

In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ ist g komplex differenzierbar?
Tipp: Polarkoordinaten!

b) Welche der folgenden Funktionen sind im Punkt $z^* = \pi$ komplex differenzierbar? Welche der in $z^* = \pi$ differenzierbaren Funktionen ist in einer ganzen Umgebung des Punktes $z^* = \pi$ differenzierbar?

(i) $f(z) := \cos(\mathrm{Re}\,(z))\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$

(ii) $g(z) :=\ \bar{z}^3\,, \quad \arg(z) \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right],\ |z| > 0\,.$ **Tipp: Polarkoordinaten!**

Bearbeitungstermine: 08.06.21 - 11.06.21