

## Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 2 (19.5.-22.5.20)

#### Aufgabe 5:

- a) Für den Hauptwert des komplexen Logarithmus  $\ln$  und  $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$  und  $z_2 = -2i$  berechne man

$$\ln(z_1), \ln(z_2) \text{ und } \ln(z_1 z_2),$$

und überprüfe an diesem Beispiel, ob für den Hauptwert die Funktionalgleichung gilt:

$$\ln(z_1) + \ln(z_2) = \ln(z_1 z_2).$$

- b) Die  $\cos$ -Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}).$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von  $\cos z$  und bestimme alle Lösungen von  $\cos z = 3$ .

#### Aufgabe 6:

Gegeben sei die Joukowski-Funktion  $w = f(z) := \frac{1}{2} \left( \frac{z}{4} + \frac{4}{z} \right)$ .

- a) Man bestimme die Bilder

- (i) des Kreises  $|z| = 5$ ,
- (ii) des Halbstrahls  $\operatorname{Re}(z) < 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) = 0$ ,
- (iii) des Halbstrahls  $\operatorname{Re}(z) = 0$ ,  $\operatorname{Im}(z) < 0$ .

- b) Man berechne die Umkehrfunktion  $z = f^{-1}(w)$  für  $|z| > 4$ .

**Aufgabe 7:**

Gegeben sei die Abbildung  $T : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  mit

$$T(z) = \frac{z+2}{z-2}.$$

- Handelt es sich bei  $T$  um eine Möbius-Transformation?
- Man berechne die Umkehrabbildung.
- Man bestimme das Bild der reellen Achse.
- Man bestimme das Bild des Kreises  $|z| = 2$ .
- Man bestimme das Bild der imaginären Achse.
- Wohin wird der Halbkreis  $H$  abgebildet?

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$$

**Aufgabe 8:**

Gegeben seien die Punkte

$$z_1 = 1, z_2 = 1 + 2i, z_3 = i$$

und

$$w_1 = 0, w_2 = 1 + i, w_3 = -1 - i.$$

- Man berechne die Möbius-Transformation  $T$ , für die mit  $j = 1, 2, 3$  gilt:

$$w_j = T(z_j).$$

- Liegen  $z_0 = 2 + i$  und  $z_1, z_2, z_3$  auf einem (verallgemeinerten) Kreis  $K$ ?
- Liegen  $w_0 = T(z_0)$  und  $w_1, w_2, w_3$  auf einem (verallgemeinerten) Kreis  $T(K)$ ?