Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Cauchysche Integralsätze und Formeln

Für eine holomorphe Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im einfach zusammenhängenden Gebiet D, $z_0 \in D$ und eine geschlossene stückweise C^1-Kurve $c : [a, b] \to D \backslash \{z_0\}$, die z_0 einmal im positiven Sinn umläuft, gilt

Cauchyscher Integralsatz: $\displaystyle\oint_c f(z)\, dz = 0\,,$

Cauchysche Integralformel: $\displaystyle f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,,$

verallg. Cauchysche Integralformel: $\displaystyle\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\,.$

Aufgabe 17:

Man berechne mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bzw. der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale, falls diese erklärt sind. Alle auftretenden Kurven werden einmal positiv orientiert durchlaufen.

a) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4}\,dz,$

b) $\displaystyle\oint\limits_{c} \frac{1}{z+2}\,dz, \quad c: \ |z+1-i| \ = \ 1,$

c) $\displaystyle\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{z^2-2z+2}{z^3-z^2+2}\,dz, \quad c_1: \ |z| \ = \ 0.5, \quad c_2: \ |z| \ = \ 1.5,$

d) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1-i|\,=\,1} \frac{1}{z^2+4z+5}\,dz,$

e) $\displaystyle\oint\limits_{c_{1,2}} \frac{z^3}{z^2-iz+6}\,dz, \quad c_1: \ |z| \ = \ 2.5, \quad c_2: \ |z-i| \ = \ 2.5,$

f) $\displaystyle\oint\limits_{c} \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz, \quad c: \ |z-i| \ = \ 3.$

Lösung:

a)

$$0 = z^2+4 = (z+2i)(z-2i)$$

Die Singularitäten $z_{1,2} = \pm 2i$ liegen nicht im Kreis $|z| = 1$.

Cauchyscher Integralsatz:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4}\,dz = 0$$

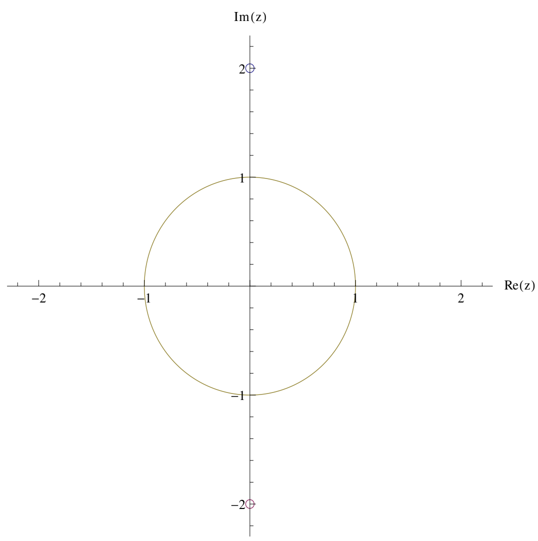

Bild 17 a): Kurve $c: \ |z| \ = \ 1$

b)

Isolierte Singularität bei $z_0 = -2$ wird nicht von $c : |z + 1 - i| = 1$ umschlossen

$$\oint\limits_{|z+1-i|=1} \frac{1}{z+2}\, dz = 0$$

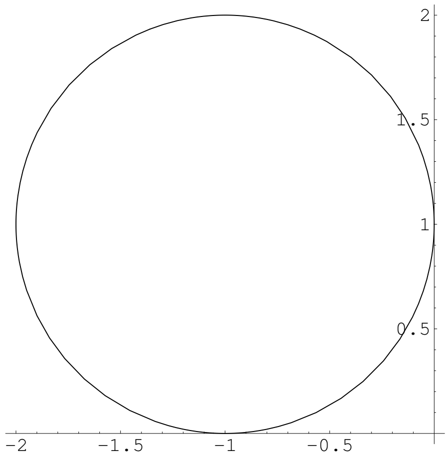

Bild 17 b): Kurve $c : |z + 1 - i| = 1$

c) $\dfrac{z^2 - 2z + 2}{z^3 - z^2 + 2} = \dfrac{(z - 1 - i)(z - 1 + i)}{(z + 1)(z - 1 - i)(z - 1 + i)} = \dfrac{1}{z + 1}$

Isolierte aber hebbare Singularitäten bei $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$:

Isolierte und nicht hebbare Singularität bei $z_0 = -1$:

z_0 wird von $c_1 : |z| = 0.5$ nicht umschlossen: $\displaystyle\oint\limits_{c_1} \frac{1}{z+1}\, dz = 0$

z_0 wird von $c_2 : |z| = 1.5$ umschlossen: $\displaystyle\oint\limits_{c_2} \frac{1}{z+1}\, dz = 2\pi i$

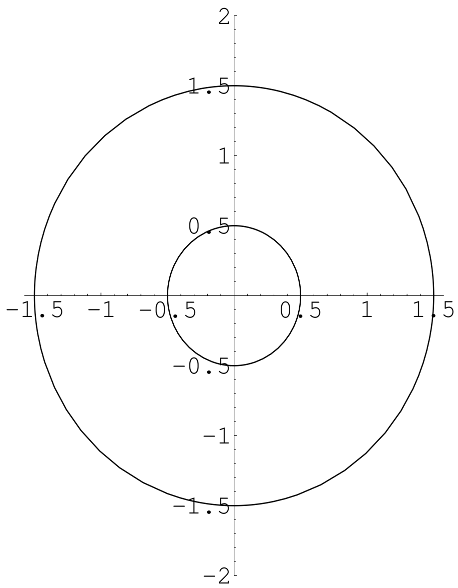

Bild 17 c): Kurven $c_1 : |z| = 0.5$ und $c_2 : |z| = 1.5$

d)

$0 = z^2 + 4z + 5$
$= (z+2+i)(z+2-i)$
$\Rightarrow \; z_{1,2} = -2 \pm i$

Die Singularität $z_1 = -2+i$ liegt auf dem Kreis $|z+1-i| \; = \; 1$.

Damit ist das Integral nicht erklärt.

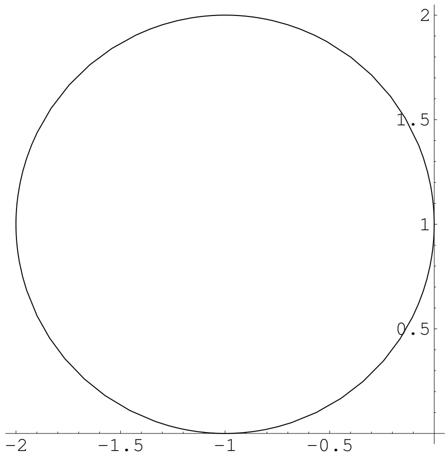

Bild 17 d): Kurve $c : \; |z+1-i| \; = \; 1$

e) $\dfrac{z^3}{z^2 - iz + 6} = z^3 \cdot \dfrac{1}{z-3i} \cdot \dfrac{1}{z+2i}$,

Singularitäten bei $z_0 = 3i$ und $z_1 = -2i$:

$c_1 : \; |z| \; = \; 2.5$ umschließt nur die Singularität $z_1 = -2i$

$$f(z) = z^3 \cdot \frac{1}{z-3i} \quad \Rightarrow \quad f(-2i) = \frac{(-2i)^3}{-2i-3i} = \frac{8i}{-5i} = -\frac{8}{5}$$

$$\oint_{c_1} \frac{f(z)}{z+2i} dz = 2\pi i f(-2i) = -\frac{16\pi i}{5}$$

$c_2 : \; |z-i| \; = \; 2.5$ umschließt nur die Singularität $z_1 = 3i$

$$f(z) = z^3 \cdot \frac{1}{z+2i} \quad \Rightarrow \quad f(3i) = \frac{(3i)^3}{3i+2i} = \frac{-27i}{5i} = -\frac{27}{5}$$

$$\oint_{c_2} \frac{f(z)}{z+2i} dz = 2\pi i f(3i) = -\frac{54\pi i}{5}$$

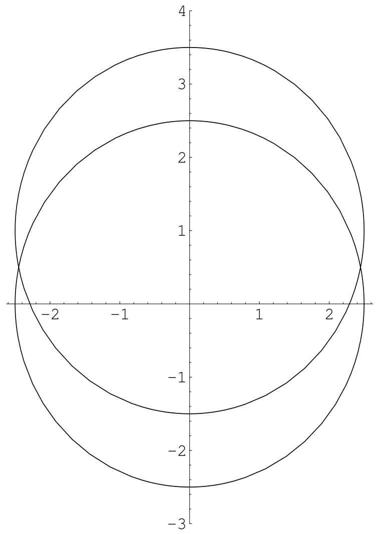

Bild 17 e): Kurven $c_1 : \; |z| \; = \; 2.5$ und $c_2 : \; |z-i| \; = \; 2.5$

f) $c : |z - i| = 3$ umschließt zunächst beide Singularität $z_0 = -2$ und $z_1 = 1$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + z - 2} = 1 + \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+2}$,

$$\oint\limits_c \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + z - 2}\, dz = \oint\limits_c dz + \oint\limits_c \frac{1}{z-1}\, dz + \oint\limits_c \frac{1}{z+2}\, dz = 0 + 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$$

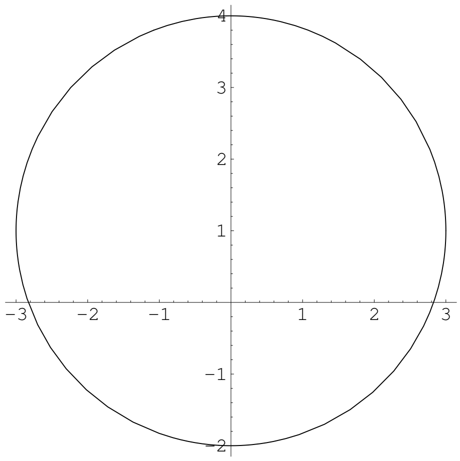

Bild 17 f): Kurve $c : |z - i| = 3$

Aufgabe 18:

Man berechne mit Hilfe der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz,$$

b) $$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^5 + 2z^4}\, dz,$$

c) $$\oint\limits_{c} z^2 + \frac{e^z}{z^2}\, dz, \qquad c: \; |z| \; = \; \pi,$$

d) $$\oint\limits_{c} \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\, dz, \qquad c: \; |z-1-2i| \; = \; 2.$$

Lösung:

a)

Die Singularität $z_1 = 0$ liegt im Kreis $|z| = 1$.

verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} = 2\pi i \frac{(\cos z)''}{2!}\bigg|_{z=0}$$
$$= -\pi i \cos 0 = -\pi i$$

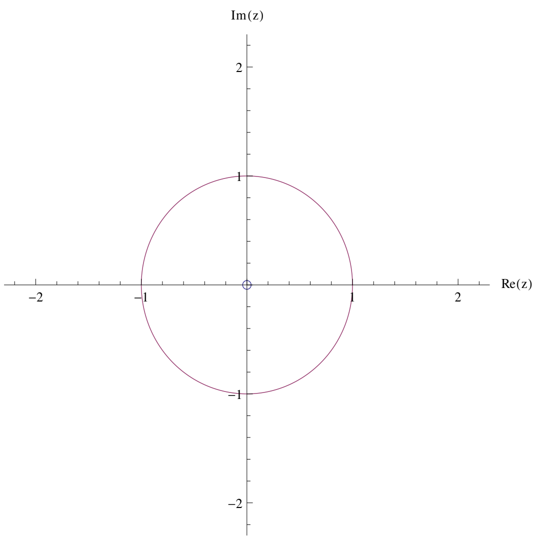

Bild 18 a): Kurve $c: \; |z| \; = \; 1$

b) $\dfrac{1}{z^5+2z^4} = \dfrac{1}{z^4}\cdot\dfrac{1}{z+2}$

Die Singularität $z_1 = 0$ liegt im Kreis $|z| = 1$ und die Singularität $z_2 = -2$ nicht.

verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^5+2z^4} = \frac{2\pi i}{3!}\left(\frac{1}{z+2}\right)'''\Bigg|_{z=0}$$
$$= \frac{2\pi i(-1)(-2)(-3)}{3!}\cdot\frac{1}{(z+2)^4}\Bigg|_{z=0}$$
$$= -\frac{\pi i}{8}$$

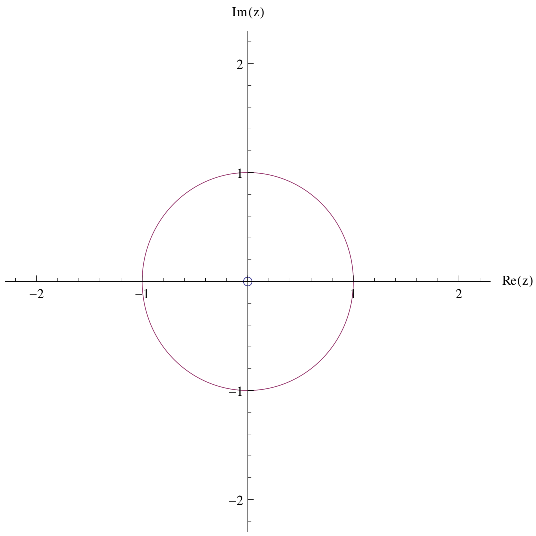

Bild 18 b): Kurve $c:\ |z| = 1$

c) Isolierte Singularität bei $z_0 = 0$ liegt in $c:\ |z| = \pi$

$$\oint\limits_{|z|=\pi} z^2 + \frac{e^z}{z^2}\,dz$$
$$= \oint\limits_{|z|=\pi} z^2\,dz + \oint\limits_{|z|=\pi} \frac{e^z}{z^2}\,dz$$
$$= 0 + 2\pi i\frac{(e^z)'|_{z=0}}{1!} = 2\pi i$$

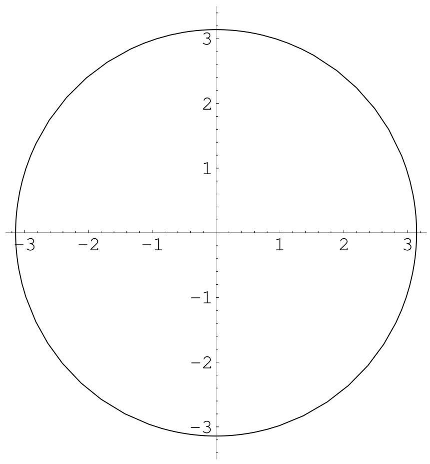

Bild 18 c): Kurve $c:\ |z| = \pi$

d) Einzige Singularität bei $z_0 = 1+i$,

$\ln z$ ist holomorph im von der Kurve $c:\ |z-1-2i| = 2$ umschlossenen Gebiet.

$$\ln^{(iv)} z = -\frac{6}{z^4} \quad\Rightarrow\quad \ln^{(iv)}(1+i)$$
$$= -\frac{6}{(1+i)^4} = -\frac{6}{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^4} = \frac{3}{2}$$

$$\oint\limits_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz$$
$$= \frac{2\pi i\ln^{(iv)}(1+i)}{4!} = \frac{\pi i}{8}$$

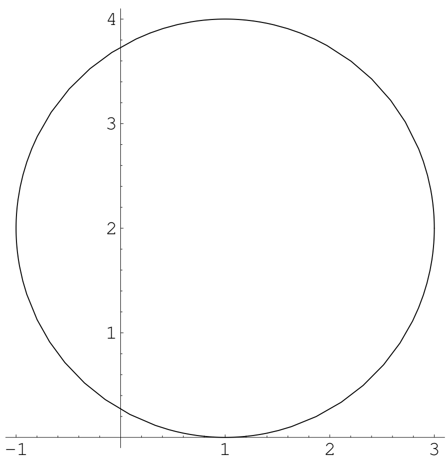

Bild 18 d): Kurve $c:\ |z-1-2i| = 2$

Taylor-Reihen

Ist $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf D holomorph, dann ist f **beliebig oft differenzierbar** und alle Ableitungen sind wieder holomorph in D .

f ist in eine **Taylor-Reihe** um den **Entwicklungspunkt** $z_0 \in D$ entwickelbar

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \, .$$

Im Kreis $K_r(z_0) := \{z \,|\, |z - z_0| < r\} \subset D$ konvergiert diese **Potenzreihe** gleichmäßig. $R = \sup r$ wird als **Konvergenzradius** bezeichnet.

Aufgabe 19:

a) Man berechne die Taylorreihe von $F(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{5 - 3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{3}{z^2 + 2z + 5}\,, \quad z_0 = i$ und $z_0 = 0\,,$

(ii) $f(z) = \dfrac{2}{e^z - 1}\,, \quad z_0 = 2\pi(1 + i)\,,$

(iii) $f(z) = \dfrac{z}{\ln(3 - 2z)}\,, \quad z_0 = 0$ und $z_0 = \dfrac{11}{8}\,.$

Lösung:

a) Der Integrand f wird unter Berücksichtigung des Entwicklungspunktes $z_0 = 1$ so umgeformt, dass die Summenformel für die geometrische Reihe angewendet werden kann.

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{5 - 3\xi} = \frac{1}{5 - 3(\xi - 1) - 3} = \frac{1}{2 - 3(\xi - 1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3(\xi-1)}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3(\xi - 1)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}}(\xi - 1)^n \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert für $|3(\xi - 1)/2| < 1$ gleichmäßig, darf also in der Kreisscheibe $|\xi - 1| < 2/3 =: R$ gliedweise integriert werden:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi} = \int_1^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} (\xi-1)^n \, d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} \int_1^z (\xi-1)^n \, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)2^{n+1}} (z-1)^{n+1} . \end{aligned}$$

(i) $f(z) = \dfrac{3}{z^2+2z+5} = \dfrac{3}{(z-(-1+2i))(z-(-1-2i))}$

Die Singularitäten liegen bei $z_1 = -1+2i$ und $z_2 = -1-2i$. Damit ergibt sich der Konvergenzradius der Taylorreihe zum Entwicklungspunkt z_0 durch

$$r = \min\{|z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|\} .$$

$z_0 = i$:
$r_1 = \min\{|-1+2i-i|, |-1-2i-i|\} = \min\{\sqrt{2}, \sqrt{10}\} = \sqrt{2}$

$z_0 = 0$: $\quad r_2 = \min\{|-1+2i|, |-1-2i|\} = \sqrt{5}$

(ii) Die Singularitäten von $f(z) = \dfrac{2}{e^z - 1}$ ergeben sich aus

$0 = e^z - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = e^x \cos y + ie^x \sin y$
$\Rightarrow \quad e^x \sin y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = k\pi$
$\Rightarrow \quad e^x \cos(k\pi) = e^x(-1)^k = 1$
$\Rightarrow \quad x = 0$ und $k = 2n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Die Singularitäten liegen also bei $\tilde{z}_n = 2n\pi i$.
Der Konvergenzradius für $z_0 = 2\pi(1+i)$ ergibt sich durch:

$$r = \min_n\{|\tilde{z}_n - z_0|\} = \min_n\{|2n\pi i - 2\pi - 2\pi i|\} = |-2\pi| = 2\pi$$

(iii) Für die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{\ln(3-2z)}$ bestehen folgende Definitionslücken:

1. Fall:
Der Hauptwert des Logarithmus von $\ln(3-2z)$ ist nur in der geschlitzen Ebene definiert, d.h. ausgenommen sind reelle Zahlen x mit $3 - 2x \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \le x$.

2.Fall:
Nennernullstellen müssen ausgenommen werden:
$0 = \ln(3-2z) = \ln|3-2z| + i\arg(3-2z) \quad \Rightarrow$
$\arg(3-2z) = 0$, also ist z reell und $|3-2z| = 1$ ergibt wegen des 1. Falles nur noch $z = 1$.

Der Konvergenzradius ist gegeben durch den kleinsten Abstand des Entwicklungspunktes z_0 zur nächsten Definitionslücke.

Für $z_0 = \dfrac{11}{8}$ ergibt sich
$r_1 = \min\left\{\left|\dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{8}\right|, \left|1 - \dfrac{11}{8}\right|\right\} = \min\left\{\dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}\right\} = \dfrac{1}{8}$.

Für $z_0 = 0$ ergibt sich $r_2 = \min\left\{\left|\dfrac{3}{2} - 0\right|, |1-0|\right\} = 1$.

Laurent-Reihen

Sei f im Kreisring
$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$
um den **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

a) f ist auf $K_{r,R}(z_0)$ eindeutig in eine **Laurent-Reihe** entwickelbar, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k := \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}} \ .$$

b) Die Koeffizienten a_k sind eindeutig bestimmt und berechnen sich für $k \in \mathbb{Z}$ mit $r < \rho < R$ durch
$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz \ .$$
Der Kreis $|z-z_0| = \rho$ wird dabei einmal positiv durchlaufen. Er kann ersetzt werden durch jede geschlossen C^1-Kurve im Kreisring, die z_0 einmal positiv umläuft.

c) **Hauptteil** und **Nebenteil** konvergieren in jedem abgeschlossenen Teilring $K_{\tilde{r},\tilde{R}}(z_0)$ mit $r < \tilde{r} \leq |z - z_0| \leq \tilde{R} < R$ absolut und gleichmäßig.

d) Ist f im Kreis $K_R(z_0)$ um z_0 holomorph, dann verschwinden die Koeffizienten des Hauptteils, d.h. es gilt $0 = a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = \cdots$ und die **Laurent-Reihe** stimmt mit der **Taylor-Reihe** überein.

e) Die **Konvergenzkarte** beispielsweise einer rationalen Funktion $f(z) = p(z)/q(z)$ mit teilerfremden Polynomen p und q und Nennernullstellen w_k mit $k \leq n$ zum Entwicklungspunkt z_0 setzt sich damit aus ineinander geschachtelten Kreisringen
$$(0 <) \quad |z - z_0| < R_1 < |z - z_0| < R_2 < |z - z_0| < \cdots < R_n < |z - z_0|$$
zusammen, mit $R_k = |w_k - z_0|$. Der innere Ring ist dabei ein echter Kreis $|z-z_0| < R_1$, falls z_0 keine Nennernullstelle ist, sonst ist es die punktierte Kreisscheibe $0 < |z-z_0| < R_1$. Die Laurent-Reihen je Kreisring werden in der Regel unterschiedlich sein.

Aufgabe 20:

Man gebe **alle** Potenzreihenentwicklungen der Funktion $f(z) = \dfrac{5z}{z^2+z-6}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = i$ an. Wo konvergieren die Reihen jeweils?

Lösung:

Aufgrund der Lage des Entwicklungspunktes bei $z_0 = i$ und der beiden Singularitäten $z_1 = 2$ und $z_2 = -3$ kann man ablesen, dass eine Taylor-Reihenentwicklung in der Kreisscheibe $|z-i| < \sqrt{5}$ vorliegen wird, eine Laurent-Reihenentwicklung im Kreisring $\sqrt{5} < |z-i| < \sqrt{10}$ und eine davon verschiedene Laurent-Reihenentwicklung im Außenraum $\sqrt{10} < |z-i|$.

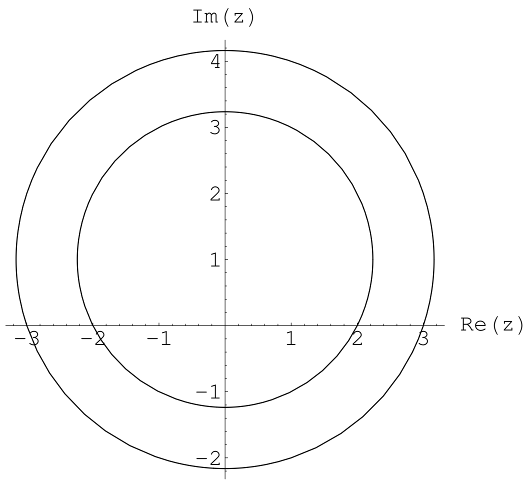

Bild 20): Konvergenzbereiche der Laurent-Reihenentwicklungen um $z_0 = i$

Mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe im entsprechenden Konvergenzbereich können die Partialbrüche durch Reihenentwicklungen dargestellt werden:

$$|z-i| < \sqrt{5} \quad : \quad \frac{2}{z-2} = \frac{2}{-2+i+(z-i)} = \frac{2}{-2+i} \cdot \frac{1}{1-(z-i)/(2-i)}$$

$$= \frac{2}{-2+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{(2-i)^{n+1}} (z-i)^n$$

$$|z-i| > \sqrt{5} \quad : \quad \frac{2}{z-2} = \frac{2}{-2+i+(z-i)} = \frac{2}{z-i} \cdot \frac{1}{1-(2-i)/(z-i)}$$

$$= \frac{2}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{(2-i)^{n+1}} (z-i)^n$$

$$|z-i| < \sqrt{10} \quad : \quad \frac{3}{z+3} = \frac{3}{3+i+(z-i)} = \frac{3}{3+i} \cdot \frac{1}{1+(z-i)/(3+i)}$$

$$= \frac{3}{3+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3+i)^n}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{(-3-i)^{n+1}}(z-i)^n$$

$$|z-i| > \sqrt{10} \quad : \quad \frac{3}{z+3} = \frac{3}{3+i+(z-i)} = \frac{3}{z-i} \cdot \frac{1}{1+(3+i)/(z-i)}$$

$$= \frac{3}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(3+i)^n}{(z-i)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{3}{(-3-i)^{n+1}}(z-i)^n$$

Taylor-Reihe mit Konvergenz in der Kreisscheibe $\quad |z-i| < \sqrt{5}$:

$$f(z) = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{(2-i)^{n+1}} + \frac{-3}{(-3-i)^{n+1}} \right)(z-i)^n}_{\text{Nebenteil}} .$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Kreisring $\quad \sqrt{5} < |z-i| < \sqrt{10}$:

$$f(z) = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2}{(2-i)^{n+1}}(z-i)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3}{(-3-i)^{n+1}}(z-i)^n}_{\text{Nebenteil}} .$$

Laurent-Reihe mit Konvergenz im Außenring $\quad \sqrt{10} < |z-i|$:

$$f(z) = \frac{3}{z+3} + \frac{2}{z-2} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{2}{(2-i)^{n+1}} + \frac{3}{(-3-i)^{n+1}} \right)(z-i)^n}_{\text{Hauptteil}} .$$