# Komplexe Funktionen
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

**Aufgabe 13:**

a) Man skizziere die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und berechne die beiden Punkte $z_1$ und $z_2$, die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von $K_1$ und $K_2$ unter $T$, wenn noch $T(0) = 1$ gilt.

**Lösung:**

a)

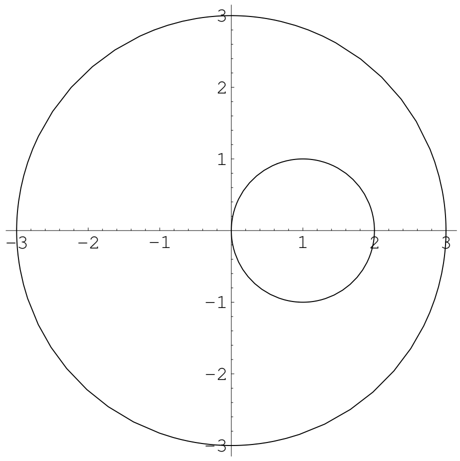


**Bild 13 a):** Kreise $K_1$ und $K_2$

Symmetrie zu $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ und
$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_2 &= 3^2 \Rightarrow \bar{z}_2 = \frac{9}{z_1} \\ (z_1-1)(\bar{z}_2-1) &= 1^2 \Rightarrow (z_1-1)\left(\frac{9}{z_1}-1\right) = 1 \\ \Rightarrow z_1^2 - 9z_1 + 9 &= 0 \\ \Rightarrow z_1 &= \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow z_2 = \frac{9}{\bar{z}_1} = \frac{9 \mp 3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

b) Mit $T(z) = k \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ und $k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gilt $w_1 = T(z_1) = 0$ und $w_2 = T(z_2) = \infty$.

$T$ ist eine Möbius-Transformation wegen $k \neq 0$,
denn $ad - bc = k(z_1 - z_2) \neq 0$.

$T$ ist holomorph für $z \in \mathbb{C}\setminus\{z_2\}$ und deshalb auch konform in diesem Gebiet, da $T'(z) = \dfrac{ad-bc}{(z-z_2)^2} \neq 0$ gilt.

c) Da $z_1$ und $z_2$ symmetrisch zu $K_1$ und $K_2$ liegen, liegen auch $w_1 = 0$ und $w_2 = \infty$ symmetrisch zu den Bildkreisen $T(K_1)$ und $T(K_2)$. Da $z_2$ nicht auf $K_{1,2}$ liegt, liegt $w_2 = \infty$ nicht auf den Bilder. Damit müssen $T(K_1)$ und $T(K_2)$ Kreise um den Ursprung sein.

Da $z_3 = 0$ auf $K_1$ liegt, wird $K_1$ wegen $T(0) = 1$ auf den Einheitskreis abgebildet.

Aus $T(0) = 1 = k \cdot \dfrac{0 - z_1}{0 - z_2} = k \cdot \dfrac{z_1}{z_2}$ folgt $k = \dfrac{z_2}{z_1}$ und

$$T(z) = \frac{z_2(z - z_1)}{z_1(z - z_2)} = \frac{z_2 z - z_2 z_1}{z_1 z - z_1 z_2} = \frac{z_2 z - 9}{z_1 z - 9}$$

Der Radius $R$ von $T(K_2)$ kann, da $z_4 = 3$ auf $K_2$ liegt, durch $R = |T(3)|$ bestimmt werden.

Konkret ergibt sich für $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

$$R = \left| \frac{3 \cdot \frac{9+3\sqrt{5}}{2} - 9}{3 \cdot \frac{9-3\sqrt{5}}{2} - 9} \right| = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \right| \approx 2.618$$

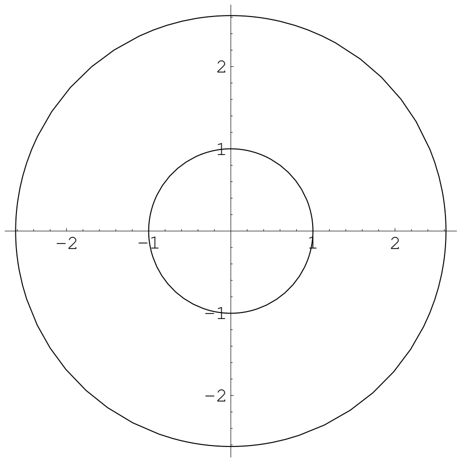


**Bild 13 c):** Kreise $T(K_1)$ und $T(K_2)$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Da $z_1$ im Inneren von $K_1$ liegt, wird das beschränkte zwischen den beiden Kreisen liegende Gebiet abgebildet auf den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}.$$

Im umgekehrten Fall, d.h. $z_1 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \approx 7.85$, erhält man den Kreisring

$$\{w \in \mathbb{C} \mid R = 0.38 < |w| < 1\}.$$

# Konforme Gebietsverpflanzung bei Problemen der Elektrostatik

Gegeben sei eine $C^2$-Funktion $\Phi : D \to \mathbb{C}$, die im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ der **'physikalischen Ebene'** die Lösung eines Problems angibt, beispielsweise beschrieben durch:

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{mit Randbedingungen} \quad \Phi|_{\partial D} = \Phi_0 \,. \qquad (P)$$

Da $(P)$ in $D$ in der Regel schwer zu lösen ist, wird es durch eine konforme Transformation $f : D \to W$ **verpflanzt** in das einfachere Gebiet $W \subset \mathbb{C}$ der **Modellebene**, durch

$$\Psi : W \to D \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \Psi := \Phi \circ f^{-1} \,.$$

Man löst dann das Ersatzproblem $(P')$ in der Modellebene:

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{mit Randbedingungen} \quad \Psi|_{\partial W} = \Psi_0 \,. \qquad (P')$$

Gerechtfertigt wird das Lösen von $\Delta\Psi = 0$ durch den **konformen Verpflanzungssatz**

$$\Delta\Phi = \Delta\Psi \cdot |f'(z)|^2 \,,$$

denn wegen $|f'(z)|^2 \neq 0$ ($f$ konform) gilt damit: $\Delta\Phi = 0 \Leftrightarrow \Delta\Psi = 0$.

Anschließend transformiert man das durch $\Psi$ gelöste Problem $(P')$ zurück und erhält die Lösung $\Phi$ des Ausgangsproblems $(P)$.

In Kreisgebieten $W$ vereinfacht sich das Lösen eines Modellproblems mit $\Delta\Psi = 0$ in der Regel durch Verwenden von **Polarkoordinaten** $(r, \varphi)$:

$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \,.$$

Die Laplacegleichung besitzt dann die Darstellung

$$\Delta\Psi = \Psi_{rr} + \frac{1}{r}\Psi_r + \frac{1}{r^2}\Psi_{\varphi\varphi} = 0 \,.$$

**Aufgabe 14:**

Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet $D$.

Man berechne eine auf $D$ harmonische Funktion, die auf $K_1$ den Wert 1 und auf $K_2$ den Wert 2 annimmt.

*Hinweis:* Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 13 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

**Lösung:**

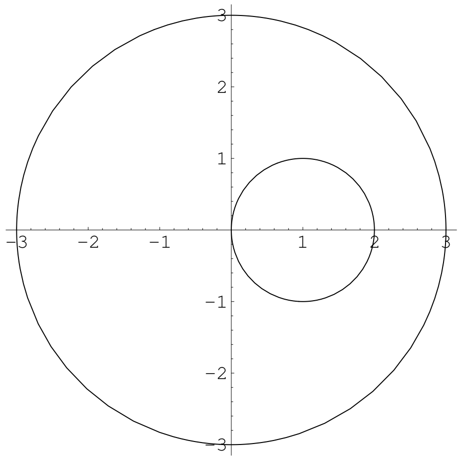


**Bild 14 a):** Gebiet $D$

Gesucht ist die reellwertige Funktion $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für die mit $z = x + iy$ gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in D \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in K_2 \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (x,y)^T \in K_1 \,. \end{aligned}$$

Das Gebiet $D$ wird jetzt durch die konforme Möbius-Transformation $T$ aus Aufgabe 11 auf einen der Kreisringe, z.B. $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |w| < R = 2.618\}$ abgebildet.

Die konform verpflanzte Funktion lautet mit $T(z) = w = \xi + i\eta$

$$U(\xi,\eta) = U(w) := u(T^{-1}(w)) = u(z)$$

und erfüllt wegen des zweiten konformen Verpflanzungssatzes:

$\Delta u = \Delta U \cdot |T'(z)|^2$ und $T'(z) \neq 0$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta U(\xi,\eta) &= 0 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T(D) \\ U(\xi,\eta) &= 2 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T(K_2) \\ U(\xi,\eta) &= 1 \quad \text{für alle} \quad (\xi,\eta)^T \in T(K_1) \,. \end{aligned}$$

Dieses Problem im Kreisring $T(D)$ lässt sich besser in Polarkoordinaten lösen, deshalb wird erneut mit $\xi = r\cos\varphi$ , $\eta = r\sin\varphi$ ,
$1 \le r \le R$ , $0 \le \varphi < 2\pi$ und $v(r,\varphi) := U(\xi(r,\varphi),\eta(r,\varphi))$ transformiert und das Problem lautet jetzt

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \le r \le R\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \\ v(R,\varphi) &= 2\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \\ v(1,\varphi) &= 1\,. \end{aligned}$$

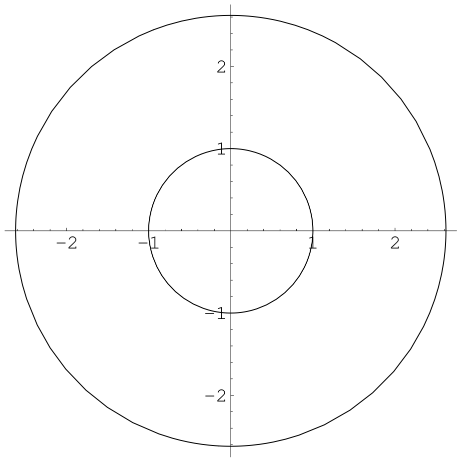


**Bild 14 b):** $T(D) = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 < |w| < R = 2.618\}$ mit $z_1 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} \approx 1.15$

Auf Grund der Gebietssymmetrie und der Rotationssymmetrie der Randdaten liegt die Vermutung nahe, dass dieses Problem eine rotationssymmetrische Lösung besitzt, d.h. $v(r,\varphi) = v(r)$. Das Problem vereinfacht sich so zu einer Randwertaufgabe mit gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\begin{aligned} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r &= 0 \quad \text{für alle} \quad 1 < r < R \\ v(R) &= 2\,, \\ v(1) &= 1\,, \end{aligned}$$

deren allgemeine Lösung lautet $v(r) = c_1 \ln r + c_2$.

Anpassen an die Randdaten liefert

$1 = v(1) = c_1 \ln 1 + c_2 = c_2$ und $2 = v(R) = c_1 \ln R + 1$
$\Rightarrow\ c_1 = 1/\ln R$.

Die gesuchte Lösung in Polarkoordinaten lautet somit

$$v(r,\varphi) = v(r) = \frac{\ln r}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die $w-$Ebene ergibt dort die Lösung

$$U(w) = \frac{\ln|w|}{\ln R} + 1.$$

Rücktransformation in die $z-$Ebene ergibt dort die Lösung

$u(z) = \dfrac{\ln|T(z)|}{\ln R} + 1.$

Mit (beachte $z_{1,2} \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} |T(z)| &= \left|\frac{z_2 z - 9}{z_1 z - 9}\right| = \left(\frac{z_2 z \bar{z}_2 \bar{z} - 9(z_2 z + \bar{z}_2 \bar{z}) + 81}{z_1 z \bar{z}_1 \bar{z} - 9(z_1 z + \bar{z}_1 \bar{z}) + 81}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2 z\bar{z} - 9z_2(z+\bar{z}) + 81}{z_1^2 z\bar{z} - 9z_1(z+\bar{z}) + 81}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{z_2^2(x^2+y^2) - 18z_2 x + 81}{z_1^2(x^2+y^2) - 18z_1 x + 81}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

ergibt sich in der $(x, y)-$Ebene die Lösungsdarstellung

$$u(x,y) = \frac{1}{2\ln R} \ln\left(\frac{z_2^2(x^2+y^2) - 18z_2 x + 81}{z_1^2(x^2+y^2) - 18z_1 x + 81}\right) + 1\ .$$

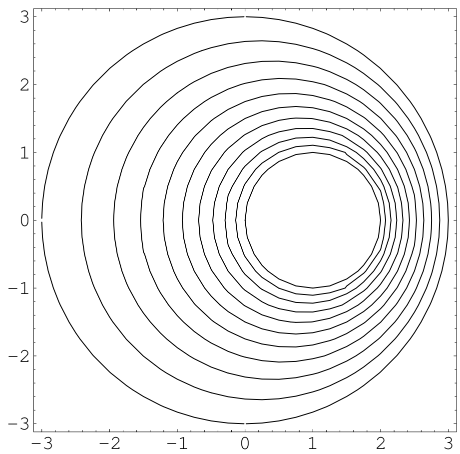


**Bild 14 c)**: Höhenlinien der Lösung $u(x, y)$

# Komplexe Integration

### Komplexwertige Funktionen mit reellem Definitionsbereich

Gegeben sei $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Mit der Zerlegung von $f$ in Real- und Imaginärteil $f(t) = u(t) + iv(t)$ wird das Integral über $f$ definiert durch

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt\,.$$

### Kurvenintegrale in der komplexen Ebene

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und eine Kurve $c$ im Definitionsbereich $D$ von $f$, mit stetig differenzierbarer Parameterdarstellung $c : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Die Kurve $c$ besitze die Zerlegung in Real- und Imaginärteil $c(t) = x(t) + iy(t)$ und den komplexwertig dargestellten Tangentialvektor $\dot{c}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$.

Dann wird das komplexe **Kurvenintegral** von $f$ längs $c$ definiert durch:

$$\int_c f(z)\,dz := \int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\,dt\,.$$

Ist die Kurve geschlossen, gilt also $c(a) = c(b)$, so verwendet man anstelle von $\int$ das Symbol $\oint$.

Die Berechnung kann mit den obigen Bezeichnungen auf reelle Integrale zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(c(t))\dot{c}(t)\,dt &= \int_a^b u(x(t),y(t))\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\dot{y}(t)\,dt \\ &\quad +i\int_a^b v(x(t),y(t))\dot{x}(t) + u(x(t),y(t))\dot{y}(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Sollte $c$ nur eine stückweise $C^1$-Kurve sein, so ergibt sich das Kurvenintegral über $c$ als Summe von Kurvenintegralen über die $C^1$-Teilkurven, aus denen sich $c$ zusammensetzt.

**Aufgabe 15:**

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^1 (2+3it)^2\,dt,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^2+1}{1+it}\,dt,$

c) $\displaystyle\int_{c_i} \mathrm{Im}(z)\,dz,$

dabei ist $c_1$ der geradlinige Weg, von $z_1 = 1$ nach $z_2 = i$. $c_2$ verbindet auch $z_1$ und $z_2$, läuft jedoch auf dem Einheitskreis in mathematisch positivem Sinn.

d) Für den Einheitskreis $c(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$ berechne man

(i) $\displaystyle\oint_c \bar{z}dz\ ,$

(ii) $\displaystyle\oint_c z^2 dz\ .$

**Lösung:**

a) $$\int_0^1 (2+3it)^2\,dt = \int_0^1 4-9t^2+12it\,dt$$
$$= \int_0^1 4-9t^2\,dt + i\int_0^1 12t\,dt = 4t-3t^3\Big|_0^1 + 6it^2\Big|_0^1 = 1+6i$$

b) $$\int_{-1}^1 \frac{t^2+1}{1+it}\,dt = \int_{-1}^1 \frac{(t^2+1)(1-it)}{t^2+1}\,dt = \int_{-1}^1 1\,dt - i\int_{-1}^1 t\,dt = t|_{-1}^1 - i\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^1 = 2$$

c) $c_1(t) = 1-t+it\ , \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_{c_1} \mathrm{Im}(z)\,dz = \int_0^1 \mathrm{Im}(c_1(t))\cdot\dot{c}_1(t)\,dt = \int_0^1 (-1+i)t\,dt = -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$$

$c_2(t) = e^{it}\ , \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{c_2} \mathrm{Im}(z)\,dz = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Im}(c_2(t))\cdot\dot{c}_2(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin t(-\sin t + i\cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(-t + \sin t \cos t + i \sin^2 t)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}$$

d) (i) $\displaystyle\oint_c \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i \, dt = 2\pi i$

(ii) $\displaystyle\oint_c z^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{2it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{3it} \, dt = i \int_0^{2\pi} \cos(3t) + i \sin(3t) \, dt = 0$

**Cauchyscher Integralsatz**

Für eine holomorphe Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im einfach zusammenhängenden Gebiet $D$ und eine geschlossene stückweise $C^1$-Kurve $c$ in $D$ gilt

$$\oint_c f(z)\, dz = 0\,.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist das Integral **wegunabhängig**, d.h. für zwei nicht notwendig geschlossene Kurven $c$ und $\tilde{c}$, die den gleichen Anfangspunkt $z_1$ und Endpunkt $z_2$ besitzen gilt:

$$\int_c f(z)\, dz = \int_{\tilde{c}} f(z)\, dz =: \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz\,.$$

$F$ heißt **Stammfunktion** zu $f$, wenn $F' = f$ gilt. Unter den Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes gilt dann

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz\,.$$

**Aufgabe 16:**

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_c z^3 + 4\, dz$ entlang des geradlinigen Weges von $1 - i$ nach $1 + i$,

b) $\displaystyle\int_c z e^z\, dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \le t \le 0$,

c) $\displaystyle\int_{c_k} \frac{1}{z}\, dz$ für die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$,

d) $\displaystyle\int_1^i \ln z\, dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

**Lösung:**

a) direkt:

Kurvenparametrisierung: $c(t) = 2it + 1 - i\,, \quad 0 \le t \le 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = 2i$

$$\begin{aligned}
\int_c z^3 + 4\,dz &= \int_0^1 ((c(t))^3 + 4)\dot{c}(t)\,dt = \int_0^1 ((2it + 1 - i)^3 + 4)2i\,dt \\
&= \int_0^1 (-8it^3 - 12(1-i)t^2 + 12t - 2i - 2 + 4)2i\,dt \\
&= \int_0^1 16t^3 - 24(1+i)t^2 + 24it + 4 + 4i\,dt \\
&= \left(4t^4 - 8(1+i)t^3 + 12it^2 + (4+4i)t\right)\Big|_0^1 \\
&= 4 - 8(1+i) + 12i + (4+4i) = 8i
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int_c z^3 + 4\,dz &= \int_{1-i}^{1+i} z^3 + 4\,dz = \left(\frac{z^4}{4} + 4z\right)\Bigg|_{1-i}^{1+i} \\
&= \left(\frac{(1+i)^4}{4} - \frac{(1-i)^4}{4} + 4(1+i-(1-i)\right) = \frac{-4}{4} - \frac{-4}{4} + 8i = 8i
\end{aligned}$$

b) direkt: $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \le t \le 0$

$$\begin{aligned}
\int_c ze^z\,dz &= \int_{-1}^0 \dot{c}(t)c(t)e^{c(t)}\,dt = \int_{-1}^0 i\pi i\pi t e^{i\pi t}\,dt = -\pi^2 \int_{-1}^0 te^{i\pi t}\,dt \\
&= -\pi^2 \left( \frac{te^{i\pi t}}{i\pi}\Bigg|_{-1}^0 - \frac{1}{i\pi}\int_{-1}^0 e^{i\pi t}\,dt \right) = -\pi^2 \left(\frac{te^{i\pi t}}{i\pi} - \frac{e^{i\pi t}}{(i\pi)^2}\right)\Bigg|_{-1}^0 \\
&= e^{i\pi t}\,(i\pi t - 1)\big|_{-1}^0 = -1 - e^{-i\pi}(-i\pi - 1) \\
&= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi
\end{aligned}$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
\int_c ze^z\,dz &= \int_{-i\pi}^0 ze^z\,dz = e^z(z-1)\big|_{-i\pi}^0 = -1 - e^{-i\pi}(-i\pi - 1) \\
&= -1 + (-i\pi - 1) = -2 - i\pi
\end{aligned}$$

c) (i) $c_1(t) = it$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{i}{it}\,dt = \ln t\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \ln\frac{3\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln 3$$

Stammfunktion:

$$\int_{c_1} \frac{1}{z}\,dz \;=\; \ln z\Big|_{\pi i/4}^{3\pi i/4} = \ln\left|\frac{3\pi i}{4}\right| + i\frac{\pi}{2} - \left(\ln\left|\frac{\pi i}{4}\right| + i\frac{\pi}{2}\right) = \ln\frac{3\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln 3$$

(ii) $c_2(t) = e^{it}$ mit $\pi/4 \le t \le 3\pi/4$

direkt:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} i\,dt = it\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{\pi i}{2}$$

Stammfunktion:

$$\int_{c_2} \frac{1}{z}\,dz = \ln z\Big|_{(1+i)/\sqrt{2}}^{(-1+i)/\sqrt{2}} = \ln\left|\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right| + i\frac{3\pi}{4} - \ln\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| - i\frac{\pi}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

d) direkt: $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ mit $0 \le \varphi \le \pi/2$

$$\begin{aligned}
\int_1^i \ln z\,dz &= \int_0^{\pi/2} \ln(e^{i\varphi}) i e^{i\varphi}\,d\varphi \;=\; i\int_0^{\pi/2} e^{i\varphi}(\ln|e^{i\varphi}| + i\varphi)\,d\varphi \\
&= -\int_0^{\pi/2} e^{i\varphi}\varphi\,d\varphi \;=\; \left(-\frac{\varphi}{i}e^{i\varphi}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{i}\int_0^{\pi/2} e^{i\varphi}\,d\varphi \\
&= -\frac{\pi}{2} - e^{i\varphi}\Big|_0^{\pi/2} \;=\; -\frac{\pi}{2} - i + 1
\end{aligned}$$

Stammfunktion: In der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-^0$ ist $\ln z$ holomorph.

$$\begin{aligned}
\int_1^i 1\cdot\ln z\,dz &= z\ln z\Big|_1^i - \int_1^i z\cdot\frac{1}{z}\,dz \;=\; \left(z\left(\ln|z| + i\arg z\right) - z\right)\Big|_1^i \\
&= i\left(\ln|i| + i\frac{\pi}{2}\right) - (i-1) \;=\; -\frac{\pi}{2} - i + 1
\end{aligned}$$