Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Dr. K. Rothe ©

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

Zahlen in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$:

kartesische Koordinaten für $z \in \mathbb{C}$: $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

imaginäre Einheit	$i := \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$
Realteil	$\mathrm{Re}(z) := x,$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z) := y,$
Konjugation	$\bar{z} := x - iy$
Addition	$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
Betrag	$\lvert z \rvert := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2},$

Formel von Euler: für $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Polarkoordinaten

für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$: $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $0 \le \varphi < 2\pi$ (oder alternativ $-\pi < \varphi \le \pi$)

Radius=Betrag: $r = |z|$, Winkel=Argument: $\varphi = \arg(z)$

Umwandlung komlexer Zahldarstellungen:

a) kartesische Koordinaten $\longrightarrow$ Polarkoordinaten

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$0 \le \varphi < 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & , \; x > 0 \; , \; y \ge 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & , \; x = 0, \; , \; y > 0 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & , \; x < 0 \quad y \ge 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & , \; x = 0, \; , \; y < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & , \; x > 0 \; , \; y < 0 \end{cases}$$

$$-\pi < \varphi \le \pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & , \; x > 0 \; , \\ \dfrac{\pi}{2} & , \; x = 0, \; , \; y > 0 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & , \; x < 0 \quad y \ge 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & , \; x = 0, \; , \; y < 0 \\ -\pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & , \; x < 0 \; , \; y < 0 \end{cases}$$

b) Polarkoordinaten $\longrightarrow$ kartesische Koordinaten

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \Rightarrow \quad x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi.$$

Berechnung n-ter Wurzeln:

Alle Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ von $z^n = c$ mit $c \in \mathbb{C}$ ergeben sich über die Polarkoordinatendarstellung von $c = re^{i\varphi}$ durch

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{(\varphi+2k\pi)i/n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Aufgabe 1:

Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{(1+2i)^2}{2-i}$ und $z_2 := \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^6 .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w + z_2)^3 = 1$ in kartesischen Koordinaten an.

Lösung:

a) $z_1 = \dfrac{(1+2i)^2}{2-i} = \dfrac{(-3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{-10+5i}{5} = -2+i$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1) = -2, \quad \mathrm{Im}(z_1) = 1$

$|z_1| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}, \quad \arg(z_1) = \pi + \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right),$

$z_1 = \sqrt{5}e^{i\left(\pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)},$

$z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_2) = \dfrac{1}{2}, \quad \mathrm{Im}(z_2) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$|z_2| = 1, \quad \arg(z_2) = \arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}, \quad z_2 = e^{\pi i/3}$

b) $z_2^6 = \left(e^{\pi i/3}\right)^6 = e^{6\pi i/3} = e^{2\pi i} = 1$

c) $(w+z_2)^3 = 1 = 1e^0$

$\Rightarrow \quad w_k = 1^{1/3}e^{(0+2\pi k)i/3} - z_2\,, \quad k = 0,1,2$

$w_0 = 1 - z_2 = 1 - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2},$

$w_1 = e^{2\pi i/3} - z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = -1,$

$w_2 = e^{4\pi i/3} - z_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}.$

Die drei Lösungen w_k liegen auf einem Kreis um $z_2 = -\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ mit Radius $r = 1$.

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{w \in \mathbb{C} : |w + z_2|^3 = |8i|\}$, mit $z_2 := \sqrt{3} - i$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2}\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : 9\mathrm{Re}(z^2) + 13(\mathrm{Im}(z))^2 = 36\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : 3\pi/2 < \arg(zi) < 2\pi \, , \; 0 < |z|\}$.

Lösung:

a) $|w + z_2|^3 = |8i| = 8 \quad \Leftrightarrow \quad |w + z_2| = 2$

Alle w liegen auf einem Kreis um $-z_2 = i - \sqrt{3}$ mit Radius $r = 2$.

In kartesischen Koordinaten $w = u + iv$ erhält man die Darstellung:

$$\begin{aligned} |w + z_2| &= |u + iv + \sqrt{3} - i| = |u + \sqrt{3} + i(v - 1)| \\ &= \sqrt{(u + \sqrt{3})^2 + (v - 1)^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (u + \sqrt{3})^2 + (v - 1)^2 = 2^2, \quad \text{Radius } r = 2, \quad \text{Mittelpunkt } \left(-\sqrt{3}, 1\right).$$

b) Mit der kartesischen Darstellung $z = x + iy$ erhält man:

$$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = |x| + |y| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \sqrt{2}$$

Die Punktmenge ist ein Quadrat mit Kantenlänge 2 und den Eckpunkten $(\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 0)$ und $(0, -\sqrt{2})$ im $\mathbb{R}^2$ bzw.
$\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ und $-i\sqrt{2}$ in $\mathbb{C}$.

c)
$$\begin{aligned} 36 &= 9\mathrm{Re}(z^2) + 13\mathrm{Im}(z)^2 \;=\; 9\mathrm{Re}((x + iy)^2) + 13(\mathrm{Im}(x + iy))^2 \\ &= 9\mathrm{Re}(x^2 - y^2 + i2xy) + 13y^2 \;=\; 9(x^2 - y^2) + 13y^2 \\ &= 9x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

Die Punktmenge wird also durch folgende Ellipse beschrieben:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \, .$$

d) $\arg(zi) = \arg(re^{i\varphi}e^{i\pi/2}) = \arg(re^{i(\varphi+\pi/2)}) = \varphi + \pi/2 \;\Rightarrow\; \pi < \varphi < 3\pi/2$

Damit ist die Punktmenge gegeben durch den 3. Quadranten ohne die berandenden Achsen.

Folgen und stetige komplexe Funktionen:

Eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann **konvergent** mit **Grenzwert** z^* und man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z^*$, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z^*| = 0 \, .$$

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ (mit $D \subset \mathbb{C}$ offen) ist genau dann **stetig** in $z_0 \in D$, wenn für eine beliebige Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt

$$f(z_0) \;=\; \lim_{n\to\infty} f(z_n) \, .$$

Aufgabe 3:

a) Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i \, , \quad z_{n+1} = \frac{i}{2}\,(2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

b) Für eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeige man die folgende Äquivalenz:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*) \, .$$

Lösung:

a) Wenn z_n konvergiert, so gilt mit $z^* := \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1}$:

$$z^* = \frac{i}{2}\,(2 - i + z^*) \quad\Rightarrow\quad z^*\left(1 - \frac{i}{2}\right) = \frac{(2-i)i}{2} \quad\Rightarrow\quad z^* = i.$$

z_n konvergiert, da

$$|z_{n+1} - i| = \left|\frac{i}{2}\,(2 - i + z_n) - i\right| = \left|\frac{i}{2}\right| \left|2 - i + z_n - \frac{i}{i/2}\right| = \frac{1}{2}\,|z_n - i|$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_{n-1} - i| = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0 - i| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \;\Leftrightarrow\; 0 = \lim_{n\to\infty} |z_n - z^*| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\mathrm{Re}(z_n - z^*)^2 + \mathrm{Im}(z_n - z^*)^2}$$

$$\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n - z^*) = 0 \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n - z^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z^*) \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z^*)$$

Elementare komplexe Funktionen:

Mit $z = x + iy = re^{i\varphi}$ und $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, sowie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erhält man

Verschiebung um den Vektor (x_0, y_0):

$$f(z) = z + z_0 = (x + x_0) + i(y + y_0)$$

Drehung um den Winkel φ_0 und **Streckung** um den Faktor r_0:

$$f(z) = z_0 \cdot z = (r_0 r)e^{i(\varphi+\varphi_0)}$$

quadratische Funktion: (Radius quadrieren und Winkel verdoppeln)

$$f(z) = z^2 = \left(re^{i\varphi}\right)^2 = r^2 e^{i(2\varphi)}$$

Exponentialfunktion:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Aufgabe 4:

a) Man bestimme das Bild von $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1 \, , \, 0 \le \mathrm{Im}(z) \le 1\}$ unter der durch $f(z) = iz^2 + 2$ definierten Abbildung.

b) Gegeben seien $z_1 = 3 + \dfrac{\pi i}{4}$ und $z_2 = 1 - \dfrac{\pi i}{2}$. Man berechne

$$\exp(z_1)\ , \ \exp(z_2) \quad \text{und} \quad \exp(z_1 + z_2)$$

in kartesischen Koordinaten und bestätige an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der e-Funktion in $\mathbb{C}$:

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)\ .$$

Lösung:

a)

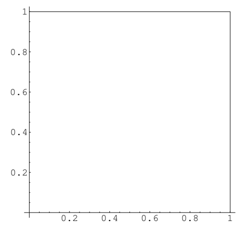

Bild 4.a.1) $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\ ,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$

Die Abbildung $f(z) = iz^2 + 2$ wird interpretiert als Hintereinanderausführung $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ mit $f_1(z) = z^2$, $\quad f_2(u) = iu$ und $f_3(v) = v + 2$.

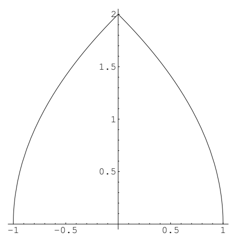

Bild 4.a.2) $f_1(Q)\}$

Mit der Funktion $f_1(z) = z^2$ werden die Ränder von Q folgendermaßen abgebildet:

(i) $c_1(x) = x$ mit $x \in [0, 1]$: $\quad f_1(c_1(x)) = x^2$,
damit wird das Intervall $[0, 1]$ in sich abgebildet.

(ii) $c_2(y) = 1 + iy$ mit $y \in [0, 1] \Rightarrow \quad f_1(c_2(y)) = (1 + iy)^2 = 1 - y^2 + i2y$
(nach unten geöffnete Parabel bzgl. der y-Achse)

(iii) $c_3(x) = x + i$ mit $x \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad f_1(c_3(x)) = (x + i)^2 = x^2 - 1 + i2x$
(nach oben geöffnete Parabel bzgl. der y-Achse)

(iv) $c_4(y) = iy$ mit $y \in [0, 1]$: $\quad f_1(c_4(y)) = (iy)^2 = -y^2$,
damit ist das Bild von c_4 das Intervall $[-1, 0]$.

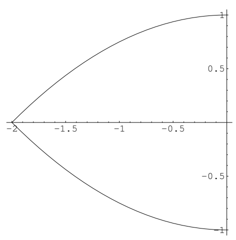

Bild 4.a.3) $f_2(f_1(Q))\}$

Die Funktion $f_2(u) = iu$ bewirkt eine Drehung um den Winkel $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

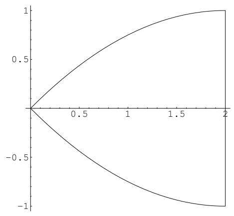

Bild 4.a.4) $f(Q) = f_3(f_2(f_1(Q)))\}$

Die Funktion $f_3(v) = v + 2$ bewirkt eine Verschiebung in Richtung der positiven x-Achse um den Wert 2.

b) $\exp(z_1) = \exp\left(3 + \dfrac{\pi i}{4}\right) = e^3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{e^3\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{e^3\sqrt{2}}{2}$

$\exp(z_2) = \exp\left(1 - \dfrac{\pi i}{2}\right) = e\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = -ie$

$\exp(z_1 + z_2) = \exp\left(4 - \dfrac{\pi i}{4}\right) = e^4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \dfrac{e^4\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{e^4\sqrt{2}}{2}$

Damit erhält man

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \left(\frac{e^3\sqrt{2}}{2} + i\frac{e^3\sqrt{2}}{2}\right)(-ie) = \frac{e^4\sqrt{2}}{2} - i\frac{e^4\sqrt{2}}{2} = \exp(z_1 + z_2)\,.$$