Fachbereich Mathematik **WiSe 2019/2020**
Prof. Dr. T. Reis

Klausur Komplexe Funktionen

02. März 2020

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	TM	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1) [3+ 3 + 3 +1 Punkte] Es sei i die imaginäre Einheit.

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$e^{3z} - \frac{i}{e^z} = 0\,.$$

b) Für welche $k,\, l \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\, z \mapsto f(z)$

$$f(z) = (\mathrm{Re}\,(z))^3 + i\cdot k\cdot(\mathrm{Re}\,(z))^2\cdot\mathrm{Im}\,(z) - k\cdot\mathrm{Re}\,(z)\cdot(\mathrm{Im}\,(z))^2 + i\cdot l\cdot\mathrm{Re}\,(z) - i\cdot(\mathrm{Im}\,(z))^3$$

auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

c) Welche der folgenden Mengen M_1, M_2, M_3 kann mittels einer Möbius Transformation auf den Parallestreifen

$$P = \{z \in \mathbb{C} :\ -1 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$$

abgebildet werden?

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < 2\}$,

$M_2 = \{z \in \mathbb{C} :\ \mathrm{Re}\,(z) > 0,\, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$,

$M_3 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z+1| > 1 \text{ und } |z-1| > 1\}$.

Untersuchen Sie alle angebotenen Alternativen und begründen Sie Ihre Antworten!

d) Geben Sie eine Abbildung an, die den Parallestreifen

$$P = \{z \in \mathbb{C} :\ -1 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$$

auf den Parallestreifen

$$\tilde{P} = \{z \in \mathbb{C} :\ -2 < \mathrm{Im}\,(z) < 2\}$$

abbildet.

Aufgabe 2) [3+ 7 Punkte]

a) Für $z = x + iy$ sei $\bar{z} = x - iy$. Berechnen Sie

$$\oint_c \bar{z} \cdot z^{\frac{1}{2}} \, dz, \qquad c : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \ c(t) \ = \ 4e^{it} \, .$$

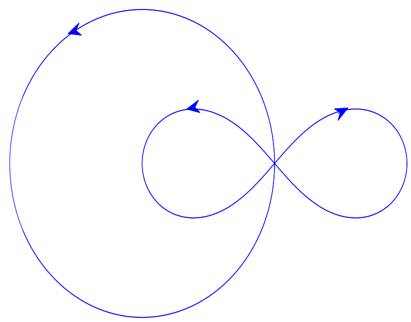
b) Gegeben ist $\quad f(z) \ = \ \dfrac{1}{z^2 - 4z + 29} \, .$

(i) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten der Funktion f.

(ii) Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 2 + 5i$, die im Punkt $z^* = 20$ gegen $f(z^*)$ konvergiert.

Aufgabe 3) [4 Punkte]

a) Die Kurve c der Skizze teilt $\mathbb{C}$ in vier Bereiche auf. Geben Sie die Umlaufzahlen der einzelnen Bereiche an.



b) Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Weiterhin seien c und $\tilde{c}$ zwei Kurven in D mit dem gleichen Anfangspunkt z_1 und dem gleichen Endpunkt z_2. Gilt dann stets

$$\int_c f(z)dz = \int_{\tilde{c}} f(z)dz \,?$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

Alternativ zu 3a oder 3b: Ein Streifen parallel zur imaginären Achse soll auf einen Kreisring abgebildet werden. Mit welcher der folgenden Abbildungsarten lässt sich dies realisieren?

i) Möbius Transformation, ii) Exponentialfunktion, iii) Lineare Funktion, iv) durch keine der angegebenen Abbildungsarten.

Untersuchen Sie alle Vorschläge i) bis iv) und begründen Sie Ihre Antworten!