Aufgabe 1) [5+6 Punkte]

a) Es sei i die imaginäre Einheit, $\log(z)$ der Hauptzweig der Logarithmus Funktion und $e = \exp(1)$.

Gegeben sei die Menge $R = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{e} < |z| < 1, -\frac{\pi}{4} < \arg(z) < 0\}$,

sowie die Abbildung

$$f(z) = \log\left(\frac{1}{z}\right) + 1 + i \cdot \frac{\pi}{4}.$$

(i) Skizzieren Sie die Menge R in der komplexen Ebene.

(ii) In welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar?

(iii) Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung f.

b) (i) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(-3) = 0, \qquad T(0) = -1, \qquad T(3) = \infty.$$

(ii) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T aus Teil b)(i).
$K :=$ reelle Achse,
$K_3 := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 3 \}$,
$\tilde{K} :=$ imaginäre Achse.

Aufgabe 2) [9 Punkte] Gegeben sei

$$f(z) = \frac{3}{(z-2)(z^2+9)}.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f und geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

c) In welcher Kreisscheibe um $z_0 = 0$ konvergiert die Taylor Reihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ gegen f?

d) Wie viele verschiedene Laurent Reihen von f gibt es zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$?

e) Berechnen Sie folgende Integrale

(i) $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)\,dz$, $\qquad C_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $C_1(t) = e^{it}$,

(ii) $\displaystyle\oint_{C_2} f(z)\,dz$, $\qquad C_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $C_2(t) = 2 + e^{it}$.

Bitte Beachten Sie Seite 3!

Aufgabe 3) [4 Punkte]

a) Gegeben sind die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 :&\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f_1(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z}\,, \\ f_2 :&\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f_2(z) = z(1 - \bar{z})\,. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Funktionen sind in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

i) f_1, ii) f_2, iii) $f_1 + f_2$, iv) keine der Funktionen unter i), ii), iii).

Bewerten Sie alle angebotenen Alternativen und begründen Sie Ihre Antworten!

b) Geben Sie zu $u(x, y) = x^2 - y^2$ eine konjugiert harmonische Funktion an.