Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) f sei eine auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und

$$f(z) = f(x+iy) = e^x\,(x\cos(y) - y\sin(y)) + i\cdot v(x,y), \qquad \text{mit } v(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Wie muss dann $v(x,y)$ aussehen? Zusatzaufgabe: Können Sie die errechnete Funktion f auch nur mit Hilfe von z, also ohne explizite Verwendung von x bzw. y ausdrücken?

b) Es sei $f(z) = \log(z)$ für $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$, mit $-\pi < \phi < \pi$.
Die Kurven $\Gamma_{1,2}$

$$\Gamma_1 = te^{i\frac{\pi}{4}},\, t \in \mathbb{R}^+, \qquad \Gamma_2 = 2e^{it}, t \in (0,\pi)$$

gehen beide durch den Punkt $z^* = \sqrt{2}(1+i)$. Um welchen Winkel werden die (Tangenten an die beiden) Kurven im Punkt z^* durch f gedreht?

Aufgabe 2:

a) In welchem Gebiet ist die Möbiustransformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ winkeltreu?

b) Ist es möglich das Gebiet

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

mittels einer Möbiustransformation auf das Innere eines echten Dreiecks abzubilden? Unter einem echten Dreieck verstehen wir ein Dreieck dessen Eckpunkte im Endlichen liegen.

c) Die Abbildungsvorschrift $f:\ z \to e^{\frac{i\pi}{4}}\,\bar{z}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Offensichtlich verursacht diese keine Längenverzerrungen. Die Größe der Winkel wird ebenfalls erhalten. f ist als Transformation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wo ist f komplex differenzierbar? Wie verträgt sich Ihr Ergebnis mit dem Satz aus Seite 132 der Vorlesung?

d) Das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi},\ -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8},\ 0 < r < 2\}$
soll bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises transformiert werden. Warum tut es $z \mapsto \left(\dfrac{z}{2}\right)^8$ nicht?
Freiwillige Zusatzaufgabe: Geben Sie eine bijektive, konforme Abbildung an, die das Gewünschte leistet.

Abgabe: 20.- 24.5.19