Aufgabe 1: (5+4+1 Punkte)

a) (i) Man berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zur Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} | \, z = it \, , \, t \in \mathbb{R}\}$ und zum Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} | \, |z-3| = \sqrt{8}\}$ liegen.

(ii) Man bestimme eine Möbius-Transformation T, für die gilt

$$T(z_1) = 0 \, , \quad T(z_2) = \infty \, .$$

(iii) Man bestimme das Bild der imaginären Achse unter T, wenn noch $T(0) = -1$ gilt.

b) (i) Ist $f(z) = z\bar{z} - 2(\mathrm{Im}(z))^2 + i\mathrm{Im}(z^2)$ holomorph (mit Begründung)?

(ii) Man überprüfe, ob

$$u(x,y) = \sin x \cosh y \;\text{ und }\; v(x,y) = \sin y \cosh x$$

harmonisch sind. Ist für $z = x + iy$ die zusammengesetzte Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorph?

c) Man berechne $\displaystyle\int_c \frac{\bar{z}e^z}{z} \, dz$ mit $c = \{c(t) = it \, : \, 0 \le t \le \pi\}$.

Aufgabe 2: (7+3 Punkte)

a) Gegeben sei die durch $f(z) = \dfrac{6}{z^2 - 2z + 10}$ definierte Funktion.

(i) Man bestimme den Typ aller Singularitäten von f und berechne die zugehörigen Residuen.

(ii) Man bestimme und skizziere die Konvergenzbereiche aller Potenzreihenentwicklungen von f um $z_0 = 1 + i$.

(iii) Man gebe die komplexe Partialbruchzerlegung von f an.

(iv) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} f(z) \, dz$ für die einfach mathematisch positiv durchlaufene Kurve $|z-1| = 1$.

(v) Man berechne $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6}{x^2 - 2x + 10} \, dx$.

b) Gegeben sei die durch $g(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3}$ definierte Funktion.

(i) Man gebe die um $z_0 = 0$ konvergente Laurent-Reihenentwicklung an.

(ii) Man klassifiziere alle Singularitäten von g und bestimme deren Residuen.

(iii) Man berechne $\displaystyle\oint_{|z|=1} g(z) dz$ für die einfach mathematisch positiv durchlaufene Kurve $|z| = 1$.