Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2018**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

a) Man entscheide (mit Begründung), ob

(i) $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 4i \cdot \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) + i$ holomorph ist,

(ii) $g(z) = \mathrm{Re}(e^z)$ holomorph ist,

(iii) $\mathrm{Re}(z^{10} + \sin^7 z)$ harmonisch ist.

b) Gegeben sei die Funktion

$$v(x, y) = 2xy - 6y + e^x \sin y.$$

(i) Man zeige, dass v harmonisch ist.

(ii) Zu $v(x, y)$ bestimme man eine Funktion $u(x, y)$, so dass die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 14:

Gegeben seien die Kurven $c_1(t) = it$ und $c_2(t) = e^{it}$ jeweils für $0 < t < \pi$.

a) Man skizziere die Kurven c_1 und c_2 in der z-Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.

b) In welche Bildkurven der w-Ebene gehen c_1 und c_2 unter dem Hauptwert von $w = \ln z$ über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

Aufgabe 15:

a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu G und K liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von G und K unter T, wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

Aufgabe 16:

Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -1 + it\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene E ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| \leq \sqrt{5}\}$.

Man berechne eine in E harmonische Funktion, die auf dem Rand von K den Wert 1 und auf G den Wert 0 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 15 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Abgabetermin: 4.6.- 8.6. (zu Beginn der Übung)