Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hinze

WiSe 2017/18

Klausur Komplexe Funktionen

5. März 2018

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1)

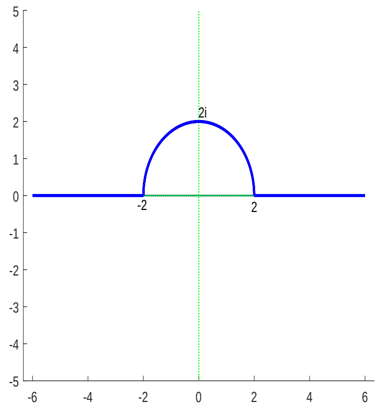
a) **[4 Punkte]**
Es sei i die imaginäre Einheit. Bestimmen Sie eine Möbius-Transformation

$$T: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \qquad T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $\qquad T(i) = 0, \qquad T(2i) = 2-i, \qquad T(1) = \infty\,.$

b) **[6 Punkte]** Es sei

$$D := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\phi},\ \phi \in [0,\pi]\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\}\ .$$



Bestimmen Sie das Bild von D unter der Abbildung $f(z) = \dfrac{2}{z} + \dfrac{z}{2}$.

Lösung zur Aufgabe 1)

a) **[4 Punkte]**
$T(i) = 0 \implies T(z) = \frac{a(z-i)}{cz+d}\,,$

$T(1) = \infty \implies T(z) = \frac{a(z-i)}{z-1}\,,$

$T(2i) = 2-i \implies 2-i = \frac{a(2i-i)}{2i-1} \implies (2-i)(2i-1) = a \cdot i$
$\implies 5i = a \cdot i \implies T(z) = \frac{5(z-i)}{z-1}\,.$

b) **[6 Punkte]** Es Sei

$$D := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -2\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} : z = 2e^{i\phi},\ \phi \in [0,2\pi]\right\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\}\ .$$

$f(z) = \frac{2}{z} + \frac{z}{2}$.
$f(z)$ ist in $\mathbb{C} \setminus 0$ differenzierbar mit $f'(z) = -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{2}$.

Es gilt $f'(z) = 0 \iff z = \pm 2$.

f ist also monoton auf $]-\infty, -2]$ und $[2, \infty[$.

$\lim\limits_{z\to-\infty} f(z) = -\infty$ und $f(-2) = -2 \implies f(]-\infty, -2]) =]-\infty, -2]$

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$ und $f(2) = 2 \implies f([2, \infty[) = [2, \infty[$

$f(2e^{i\phi}) = \frac{2}{2e^{i\phi}} + \frac{2e^{i\phi}}{2} = e^{-i\phi} + e^{i\phi} = 2\cos(\phi)$

Für $\phi \in [0, \pi]$ durchläuft $f(2e^{i\phi})$ also das Intervall $[-2, 2]$.

Insgesamt also $f(D) = \mathbb{R}$.

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^2}$.

(i) Klassifizieren Sie die isolierte Singularität $z_0 = 0$ von f und berechnen Sie das Residuum von f in $z_0 = 0$. **[2 Punkte]**

(ii) Wie lautet die Laurent-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$? **[1 Punkt]**

b) Gegeben sei $g(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4z + 20}$.

(i) Berechnen Sie die Residuen aller isolierten Singularitäten von g. **[4 Punkte]**

(ii) Berechnen Sie die folgenden Integrale. **[3 Punkte]**

$\oint_{\Gamma_1} g(z)\,dz, \qquad \Gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \Gamma_1(t) = e^{it},$

$\oint_{\Gamma_2} g(z)\,dz, \qquad \Gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \Gamma_2(t) = -4i + 3e^{it},$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 20}\,dx\,.$

Lösung zur Aufgabe 2)

a) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \cdot \left[\sin(0) + \sin'(0)(z-0) + \frac{1}{2}\sin''(0)(z-0)^2 + \cdots\right]$

Wegen $\sin(0) = 0$ und $\sin'(0) \neq 0$ liegt ein Pol erster Ordnung vor.

$\operatorname{Res}\,(f(z); 0) = \lim\limits_{z\to 0}\,((z-0)f(z)) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin(z)}{z} = \lim\limits_{z\to 0}\,\cos(z) = 1.$

Alternativ: die Reihe aus ii) berechnen!

b) Laurent-Reihe von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$? **[1 Punkt]**

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k-1}$$

c) Gegeben sei $g(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4z + 20}$.

(i) **[4 Punkte]**

Isolierten Singularitäten von f:

$z^2 + 4z + 20 = (z+2)^2 + 16 = 0 \implies z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-16} = -2 \pm 4i.$

$$\operatorname{Res}(f(z); -2+4i) = \left.\frac{1}{z - (-2-4i)}\right|_{z=-2+4i} = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}$$

$$\operatorname{Res}(f(z); -2-4i) = \left.\frac{1}{z - (-2+4i)}\right|_{z=-2-4i} = \frac{1}{-8i} = \frac{i}{8}$$

(ii) [**3 Punkte**] Mit dem Residuensatz erhält man:
$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz \;=\; 0$ (CIS)

$\oint_{|z+4i|} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z);-2-4i) \;=\; \frac{-\pi}{4}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+20}\,dx \;=\; 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z);-2+4i) \;=\; \tfrac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 3)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion mit $f'(1) \neq 0$.

Die beiden Geraden

$$g_1(z) := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) - 1\}, \qquad g_2(z) := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

schneiden sich im Punkt $z_0 = 1$.

Geben Sie den Winkel zwischen $f(g_1)$ und $f(g_2)$ im Punkt $f(1)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3) [4 Punkte]

Komplex differenzierbare Funktionen sind in allen Punkten, in denen $f'(z) \neq 0$ gilt, konform also winkeltreu.

Wie man zum Beispiel anhand einer Skizze sieht, schneiden sich die beiden Geraden im Punkt 1 unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$. Dieser Winkel wird unter f in Größe und Orientierung erhalten. Die Bilder der beiden Geraden schneiden sich also im Punkt $f(1)$ ebenfalls unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$.