Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6: Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der Funktionen

$$g(z) = \frac{2+3z+z^2}{(z^2+4)(z^2-1)}, \qquad f(z) = \frac{1+z-z^2+iz^3}{z^2(z+i)}$$

und klassifizieren Sie diese.

b) Berechnen Sie die komplexen Partialbruchzerlegungen der Funktionen aus Teil a). Was hätten Sie in Analysis II als Partialbruchzerlegung von g erhalten?

Lösungshinweise zur Aufgabe 1:

a) $$g(z) = \frac{2+3z+z^2}{(z^2+4)(z^2-1)} = \frac{(1+z)(2+z)}{(z^2+4)(z+1)(z-1)}.$$

g hat eine hebbare Singularität bei $z=-1$ und die einfachen Pole $z_1 = 1,\ z_2 = 2i,\ z_3 = -2i$.

Es gilt $$f(z) = \frac{1+z-z^2+iz^3}{z^2(z+i)} = i + \frac{1+z}{z^2(z+i)}$$

f hat einen einfachen Pol in $z=-i$ und einen Pol zweiter Ordnung in $z=0$.

b) g hat eine hebbare Singularität bei $z=-1$ und die einfachen Pole $z_1 = 1,\ z_2 = 2i,\ z_3 = -2i$. Außerdem verschwindet g im Unendlichen. Mit den entsprechenden Hauptteilen gilt also

$$g(z) = h_1(z) + h_2(z) + h_3(z)$$

Es gilt

$$g(z) = \frac{1}{z-1}\,\frac{(1+z)(2+z)}{(z^2+4)(z+1)} \Longrightarrow Res\, g(1) = \left[\frac{2+z}{z^2+4}\right]_{z=1} = \frac{3}{5}$$

$$h_1(z) = \frac{k(1)}{z-1} = \frac{3}{5}\,\frac{1}{z-1}$$

Analog erhält man

$$h_2(z) = \frac{1}{z-2i}\left[\frac{2+z}{(z+2i)(z-1)}\right]_{z=2i} = -\frac{3+i}{10}\,\frac{1}{z-2i}$$

sowie

$$h_3(z) = \frac{1}{z+2i}\left[\frac{2+z}{(z-2i)(z-1)}\right]_{z=-2i} = \frac{i-3}{10}\,\frac{1}{z+2i}$$

Die komplexe Partialbruchzerlegung lautet also

$$g(z) = \frac{3}{5}\,\frac{1}{z-1} - \frac{3+i}{10}\,\frac{1}{z-2i} - \frac{3-i}{10}\,\frac{1}{z+2i}$$

und die reelle Partialbruchzerlegung, die man in Analysis II erhalten hätte lautet:

$$g(z) = \frac{3}{5}\,\frac{1}{z-1} - \frac{3z-2}{5(z^2+4)}$$

****

f verschwindet nicht im Unendlichen. Also machen wir erst eine Polynomdivision:

$$f(z) = \frac{1+z-z^2+iz^3}{z^2(z+i)} = i + \frac{1+z}{z^2(z+i)}$$

Dann bestimmen wir die Hauptteile zum gebrochen rationalen Teil von f in Null und $-i$. In Null gilt

$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1+z}{z+i} = \frac{1}{z^2}\tau(z)$$

mit einer in der Nähe von Null holomorphen (also in eine Taylorreihe entwickelbaren) Funktion τ. Den Hauptteil bei Entwicklung um Null erhalten wir als

$$h_0(z) = \frac{1}{z^2}\left(\tau(0)+\tau'(0)(z-0)\right) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{i} + \left.\frac{z+i-1-z}{(z+i)^2}\right|_{z=0}\cdot z\right) = -\frac{i}{z^2} + \frac{1-i}{z}$$

Den Hauptteil für $z=-i$ erhält man wieder über die Berechnung des Residuums:

$$h_{-i}(z) = \frac{Res\ h(-i)}{z+i} = \frac{1}{z+i}\left(\left.\frac{1+z}{z^2}\right|_{z=-i}\right) = \frac{i-1}{z+i}$$

Damit lautet die komplexe PBZ

$$f(z) = i + h_0(z) + h_{-i}(z) = i - \frac{i}{z^2} + \frac{1-i}{z} + \frac{i-1}{z+i}$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuenkalküls.

a) $f(z) := \dfrac{1}{z^4 + 16}$.

i) $\displaystyle\oint_{|z-2|=2} f(z)\,dz$, **ii)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+16}\,dx$.

b) $g(z) := \dfrac{z^2 + 2z}{z^{\frac{4}{3}}(z^3 + 2z^2 + 4z + 8)}$.

i) $\displaystyle\oint_{|z-3i|=2} g(z)\,dz$, **ii)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+2x}{x^{\frac{4}{3}}(x^3+2x^2+4x+8)}\,dx$.

c) $\int_0^\infty \dfrac{x^2\cos(\omega x)}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx$, $\omega \in \mathbb{R}^+$.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

a) Die Nullstellen der Funktion $z^4 + 16 = 0$ sind die vierten Wurzeln aus $16e^{i\pi}$, also

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}},$$

Es gilt

$$Res\, f(z_k) \;=\; \frac{1}{4z_k^3}.$$

(i) Nur z_1 und z_4 liegen im Kreis mit Radius 2 um 2. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-2|=2} f(z)\,dz &= 2\pi i(Res\, f(z_1) + Res\, f(z_4)) \\
&= \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{1}{2^3\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{2^3\cdot e^{i\frac{21\pi}{4}}}\right) = \frac{\pi i}{16}\left(\frac{1}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}\right) \\
&= \frac{\pi i}{16}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{+i\frac{3\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{\pi i}{16}\left(2\cos(\frac{3\pi}{4})\right) = -\,i\frac{\pi}{8\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(ii) Nur z_1 und z_2 liegen in der oberen Halbebene. Damit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+16}\,dx = 2\pi i(Res\, f(z_1) + Res\, f(z_2))$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^4+16}\,dx &= \pi i\frac{1}{32}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{\pi i}{32}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi i}{32}2i\sin(-\frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{32}
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{z^2+2z}{z^{\frac{4}{3}}(z^3+2z^2+4z+8)} = \frac{1}{z^{\frac{1}{3}}(z^2+4)} \qquad \forall z \notin \{0,-2\}.$$

Die Singularitäten liegen in $z_0 = 0,\ z_1 = 2i,\ z_2 = -2i$. Damit gilt

(i) Nur z_1 liegt im Kreis mit Radius 2 um 3i. Daher gilt

$$\oint_{|z-3i|=2} g(z)\,dz \;=\; 2\pi i\, Res\, g(z_1) \;=\; 2\pi i \frac{1}{(2i)^{\frac{1}{3}}(2i+2i)} \;=\; \frac{\pi e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt[3]{2}}\,.$$

(ii) Nach Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x^2+2x}{x^{\frac{4}{3}}(x^3+2x^2+4x+8)}\,dx \\
&= \frac{2\pi i}{1-e^{-\frac{2\pi i}{3}}}\left(Res\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{3}}(z^2+4)};2i\right) + Res\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{3}}(z^2+4)};-2i\right)\right) \\
&= \frac{2\pi i}{1-e^{-\frac{2\pi i}{3}}}\left(\frac{1}{(2e^{i\pi/2})^{\frac{1}{3}}(4i)} + \frac{1}{(2e^{3\pi i/2})^{\frac{1}{3}}(-4i)}\right) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}(1-e^{-\frac{2\pi i}{3}})}\,(e^{-i\pi/6} - \frac{1}{i}) = \frac{\pi(\cos(\pi/6) - i\sin(\pi/6)+i)}{2\sqrt[3]{2}(1-\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))} \\
&= \frac{\pi(\sqrt{3}+i)}{2\sqrt[3]{2}(3+i\sqrt{3})} = \frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}\,\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2\cos(\omega x)}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\cos(\omega x)}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{z^2 e^{i\omega z}}{(z^2+4)(z^2+1)}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i\left[Res\left(\frac{z^2e^{i\omega z}}{(z^2+4)(z^2+1)};i\right) + Res\left(\frac{z^2e^{i\omega z}}{(z^2+4)(z^2+1)};2i\right)\right]\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\pi i\left[\frac{i^2e^{i\omega i}}{(i^2+4)(i+i)} + \frac{(2i)^2e^{i\omega 2i}}{(2i+2i)((2i)^2+1)}\right]\right) \\
&= \pi\operatorname{Re}\left(\frac{-e^{-\omega}}{3\cdot 2} + \frac{-4e^{-2\omega}}{4(-3)}\right) = \frac{\pi}{6}\,(2e^{-2w} - e^{-w})\,.
\end{aligned}$$