

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 5 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

- a) $\int_{C_1+C_2} |z| dz$, C_1 : geradliniger Weg von -1 nach 1, C_2 : Halbkreis mit Radius 1 um Null, von 1 nach -1 in mathematisch positiver Richtung
- b) $\int_C (1+z) dz$, $C(t) := \cos t + 3i \sin t$, $t \in [-\pi, 0]$ (Halbellipse)
- c) $\int_c (\bar{z})^2 dz$, $c(t) = 2e^{(-1+i)t}$, $t \in [0, \pi/4]$,
- d) $\int_C e^{3z} dz$, C : Das Stück der Parabel $\text{Im}(z) = \pi(\text{Re}(z))^2$ welches die Punkte Null und $1+i\pi$ verbindet.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

a) $\int_{C_1+C_2} |z| dz$, $C_1 : t \mapsto t, t \in [-1, 1]$, $C_2 : t \mapsto e^{it}, t \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} |z| dz + \int_{C_2} |z| dz &= \int_{-1}^1 |t| dt + \int_0^\pi |e^{it}| i e^{it} dt \\ &= \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^1 t dt + [e^{it}]_0^\pi = t^2 \Big|_0^1 - 2 = -1 \end{aligned}$$

b) $\int_C (1+z) dz = \int_{C(-\pi)}^{C(0)} (1+z) dz = z + \frac{z^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 2$

Natürlich kann man auch $f(c(t))\dot{c}(t)$ einsetzen. Das ist allerdings etwas aufwendiger.

$$c) \quad c(t) = 2e^{(-1+i)t}, \quad \dot{c}(t) = 2(-1+i)e^{(-1+i)t}$$

$$\begin{aligned} \int_c (\bar{z})^2 dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2e^{(-1-i)t})^2 \cdot 2(-1+i)e^{(-1+i)t} dt = 8(-1+i) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{(-3-i)t} dt \\ &= 8 \frac{-1+i}{-3-i} (e^{(-3-i)\frac{\pi}{4}} - e^0) = 8 \frac{(-1+i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} (1-i) - 1 \right) \\ &= \frac{4}{5} (2-4i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} (1-i) - 1 \right) \end{aligned}$$

d) Die Funktion ist analytisch in \mathbb{C} . Der Wert des Integrals hängt nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

$$\int_C e^{3z} dz = \left. \frac{e^{3z}}{3} \right|_0^{1+i\pi} = \frac{1}{3} (-e^3 - 1).$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale sofern diese definiert sind. Die angegebenen Kurven sollen einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden.

$$\text{a) } \int_{C_k} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)} dz \quad k = 1, 2, 3, \quad C_k : |z| = k,$$

$$\text{b) } \int_{C_k} \frac{e^z}{(z-2i)^5} dz \quad k = 1, 2, \quad C_1 : |z-1| = 2, \quad C_2 : |z-i| = 2,$$

$$\text{c) } \int_C \frac{\cos^2(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^4} dz \quad C : |z-1| = 1,$$

$$\text{d) } \int_C \frac{e^{\pi z}}{z^3 - iz^2} dz \quad C : |z| = 2,$$

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

$$\text{a) } \int_{C_k} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)} dz \quad k = 1, 2, 3, \quad C_k : |z| = k,$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist $\int_{C_1} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)} dz = 0$.

$\int_{C_2} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)} dz$ ist nicht definiert, da der Integrand für $z = 2i$ nicht definiert ist.

Mit der Cauchyschen Integralformel erhält man

$$\int_{C_3} \frac{4e^{\pi z}}{(z-2i)} dz = 2\pi i [4e^{\pi z}]_{z=2i} = 8\pi i$$

b) Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$\int_{C_1} \frac{e^z}{(z-2i)^5} dz = 0.$$

Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\int_{C_2} \frac{e^z}{(z-2i)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} [(e^z)^{(4)}]_{z=2i} = \frac{\pi i}{12} e^{2i} = \frac{\pi}{12} (-\sin(2) + i \cos(2)).$$

c) Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\begin{aligned} \int_{|z-1|=1} \frac{\cos^2(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} \left[(\cos^2(z))''' \right]_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi i}{3} [-2(\cos(z)\sin(z))''']_{z=\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{\pi i}{3} [2\cos(2z)']_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi i}{3} [\sin(2z)]_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi i}{3} \end{aligned}$$

$$d) \int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^3 - iz^2} dz = \int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-i)} dz.$$

Wir machen zunächst eine PBZ $\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{az+b}{z^2} + \frac{c}{z-i}$

Mit dem Ergebnis $a = -c = 1$, $b = i$. Es ist also

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^3 - iz^2} dz &= \int_{|z|=2} e^{\pi z} \left(\frac{z+i}{z^2} - \frac{1}{z-i} \right) dz \\ &= \int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}(z+i)}{z^2} dz - \int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z-i} dz \\ &= 2\pi i (e^{\pi z}(z+i))' \Big|_{z=0} - 2\pi i e^{\pi z} \Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i (e^{\pi z}(\pi(z+i) + 1)) \Big|_{z=0} - 2\pi i e^{i\pi} = 4\pi i - 2\pi^2 \end{aligned}$$

Bearbeitungstermine: 15.6.15 - 19.6.15