Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4 : Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) In welchem Gebiet ist die Möbiustransformation $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ winkeltreu?

b) Ist es möglich das Gebiet

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\ \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

mittels einer Möbiustransformation auf das Innere eines echten Dreiecks abzubilden? Unter einem echten Dreieck verstehen wir ein Dreieck dessen Eckpunkte im Endlichen liegen.

c) Die Abbildungsvorschrift $f:\ z \to e^{\frac{i\pi}{4}}\bar{z}$ beschreibt eine Drehspiegelung. Offensichtlich verursacht diese keine Längenverzerrungen. Die Größe der Winkel wird ebenfalls erhalten. f ist als Transformation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wo ist f komplex differenzierbar? Wie verträgt sich Ihr Ergebnis mit dem Satz aus Folie 99 der Vorlesung?

d) Das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}\,,\ -\frac{\pi}{8} < \varphi < \frac{\pi}{8}\,,\ 0 < r < 2\}$ soll bijektiv und konform auf das Innere des Einheitskreises transformiert werden. Warum tut es $z \mapsto \left(\dfrac{z}{2}\right)^8$ nicht?

Freiwillige Zusatzaufgabe: Geben Sie eine bijektive, konforme Abbildung an, die das Gewünschte leistet.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1:

a) Die Möbius Transformation ist analytisch in $\mathbb{C}$ ohne $z = -\dfrac{d}{c}$. Mit Ausnahme dieses Punktes gilt überall $T'(z) \neq 0$. Damit ist die angegebene Möbius Transformation winkeltreu in allen Punkten mit Ausnahme von $z = -\dfrac{d}{c}$.

b) Möbius-Transformationen sind überall winkeltreu außer im Punkt $z = -\dfrac{d}{c}$. Da ein echtes Dreieck erzeugt werden soll, fällt keine „Ecke" des Urbildes mit $z = -\dfrac{d}{c}$ zusammen. In den beiden Ecken $1 + 0 \cdot i$ und $0 + i$ von M_1 schneiden sich die berandenden verallgemeinerten Kreise im Winkel $\pi/2$. Beide rechten Winkel können aber nicht in einem echten Dreieck reproduziert werden.

Alternativ: Der Rand des Gebietes besteht aus Teilen dreier verallgemeinerter Kreise, die keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Damit kann keine Möbius-Transformation alle drei verallgemeinerten Kreise des Randes auf Geraden abbilden. Denn alle Bildgeraden würden sich im unendlich fernen Punkt schneiden!

c) Die Funktion $g: z \to \bar{z}$ ist nirgends in $\mathbb{C}$ differenzierbar, denn es ist

$$g(z) = x - iy \implies u_x = 1 \neq -1 = v_y.$$

Damit ist auch f nirgends komplex differenzierbar. Die Abbildung ist aber auch nicht winkeltreu, denn sie erhält zwar die Größe der Winkel aber nicht die Orientierung.

d) Mit $\left(\frac{z}{2}\right)^8$ erhält man nur die längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene Kreisscheibe.

Lösungsskizze der Zusatzaufgabe:

1. Schritt: $f_0(z) = z^4$. *Der angegebene Achtelkreis wird bijektiv und konform auf einen Halbkreis abgebildet. Der Rand wird nun durch 2 Verallgemeinerte Kreise definiert.*

2. Schritt: *Der Schnitt zweier Verallgemeinerter Kreise wird auf einen Sektor abgebildet, wenn die Schnittpunkte der Verallgemeinerten Kreise (hier:* $16i$ *und* $-16i$ *) auf* 0 *und* ∞ *abgebildet werden. Wir wählen* $f_1(z) := \dfrac{16i + z}{16i - z}$. *Das Bild von* $i\mathbb{R}$ *ist* $\mathbb{R}$ *(Form der Koeffizienten!) und das Bild des Kreises ist eine Gerade, die in* $T(-16i) = 0$ *senkrecht auf* $\mathbb{R}$ *steht (winkeltreue). Also wird der Kreisrand auf die imaginäre Achse abgebildet. Die rechte Hälfte der Kreisscheibe geht wegen* $T(0) = 1$ *und* $T(16) = -i$ *in den 4. Quadranten über.*

3. Schritt: $f_2(z) = z^2$. *Wir verdoppeln den Öffnungswinkel und haben damit den Rand auf einer Geraden, nämlich der reellen Achse .*

4. Schritt: *Im letzten Schritt bilden wir die reelle Achse auf den Einheitskreis und zwar, so dass z. B. der Punkt* $-i$ *in den Mittelpunkt 0 übergeht. Damit erreichen wir, dass die untere Halbebene in das Innere des Einheitskreises abgebildet wird. Die Transformation* $f_3(z) := \dfrac{z + i}{z - i}$ *leistet das Gewünschte.*

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Kreisscheiben K_1 und K_2 mit Radius 1 um die Mittelpunkte i bzw. $-i$. Die Kreisscheibe K_1 möge ein elektrostatisches Potential von 0 und die Kreisscheibe K_2 ein elektrostatisches Potential von 1 haben. Im Punkt 0 seien die Kreisscheiben gegeneinander isoliert.

Zur Bestimmung des induzierten elektrostatischen Potentials und der Feldstärke soll das Gebiet außerhalb der Kreisscheiben bijektiv und konform auf einen Ring (Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen) oder einen Streifen (Gebiet zwischen zwei parallelen Geraden) abgebildet werden.

Welche der beiden Transformationen (Ring bzw. Streifen) ist möglich?

Geben Sie eine Transformation an, die das Gewünschte leistet.

Bestimmen Sie das induzierte elektrostatische Potential und die Feldstärke außerhalb der Kreisscheiben.

Hinweis: Konstruieren Sie ein Transformation T für die $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $T(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$ gilt. Bei geschickter Konstruktion bleiben die Symmetrien erhalten.

Lösung zur Aufgabe 2:

Eine Transformation auf einen Ring ist nicht möglich, da die Ränder der Kreisscheiben einen Schnittpunkt haben.

Wir transformieren also auf einen Parallelstreifen.
Um die Kreise auf parallele Geraden zu transformieren, verwenden wir eine Möbius Transformation.

Schnittpunkt der Kreise $\longrightarrow$ Schnittpunkt der Geraden $= \infty$

Also $T(0) = \infty$ oder $T(z) = \dfrac{az+b}{z}$.

Jeder der Kreise ist symmetrisch zu $i\mathbb{R}$. Die beiden Kreise liegen symmetrisch zu $\mathbb{R}$.

Um diese Symmetrien zu erhalten, kann man $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $T(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$ fordern.

$a, b \in \mathbb{R} \implies T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$a = 0 \implies T(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}$.

Also wählen wir z. B. $T(z) = \dfrac{1}{z}$.

Kreise symmetrisch zu $i\mathbb{R} \implies$ Bildgeraden symmetrisch zu $i\mathbb{R}$

$\implies$ Bildgeraden parallel zu $\mathbb{R}$.

$T(2i) = -i/2$ und $T(-2i) = i/2$.

$T(K_1) =$ Gerade mit $\operatorname{Im}(z) = -1/2$ und $T(K_2) =$ Gerade mit $\operatorname{Im}(z) = 1/2$

$T(\infty) = 0 \implies$ Das Äußere der beiden Kreisscheiben geht in den Streifen zwischen den beiden Geraden über.

Lösung des Potentialproblems :

Problem in der physikalischen Ebene:

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi) &= 0 \quad \text{Außerhalb der beiden Kreise,} \\ \Phi(z) &= 0 \quad \text{für} |z - i| = 1, \\ \Phi(z) &= 1 \quad \text{für} |z + i| = 1. \end{aligned}$$

Problem in der Model–Ebene:

$$\begin{aligned} \Delta(\Psi) &= 0 \quad \text{für } -\frac{i}{2} < \operatorname{Im}(w) < \frac{i}{2} \\ \Psi(w) &= 0 \quad \text{für } \operatorname{Im}(w) = -\frac{1}{2}, \\ \Psi(w) &= 1 \quad \text{für } \operatorname{Im}(w) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit entspricht Ψ dem elektrostatischen Potential zwischen zwei parallelen Platten. Da die Daten auf den Geraden konstant sind, wählen wir den

Ansatz $\Psi(u, v) = f(v)$.

Einsetzen in DGL ergibt: $f''(v) = 0 \Longrightarrow f(v) = a + bv$

Randdaten: $f(-\frac{1}{2}) = 0 \Longrightarrow f(v) = a \cdot \left(v + \frac{1}{2}\right)$

$f(\frac{1}{2}) = 1 \Longrightarrow a = 1\,, \qquad f(v) = v + \frac{1}{2}$

$$\Psi = \frac{1}{2} + v = \frac{1}{2} + \operatorname{Im}(w)$$

Das gesuchte Potential im physikalischen Raum erhalten wir durch Rücktransformation:

$$\Phi(x, y) = \Psi(T(z)) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{Im}\left(\frac{2}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2y}{x^2 + y^2}\right)$$

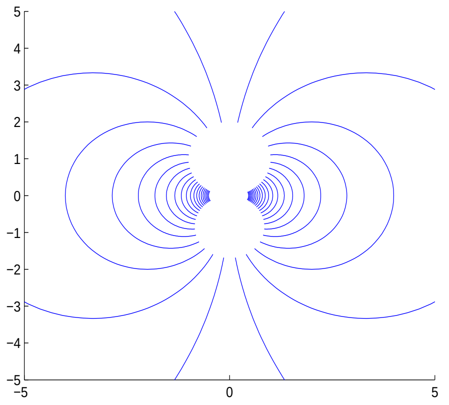
Für die Feldstärke gilt dann

$E = -\operatorname{grad}(\Phi) = -\Phi_x - i\Phi_y = -\operatorname{grad}(\Psi(T(z))\overline{T'(z)}$. Also

$E(z) = -\operatorname{grad}\Psi\left(\frac{1}{z}\right)\overline{\left(\frac{-1}{z^2}\right)} = -i \cdot \left(\frac{-1}{\bar{z}^2}\right) = i \cdot \left(\frac{z^2}{|z|^4}\right)$

Oder durch direktes Ableiten von Φ:

$E = -\operatorname{grad}(\Phi) = -\Phi_x - i\Phi_y = \left(\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + i\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)$.



Abgabe bis: 19.6.15