Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3 : Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Geben Sie eine Möbius-Transformation an, mit

$$T(0) = 2i,\ T(4) = 0,\ T(8) = \infty\,.$$

b) (i) Bestimmen Sie die Bilder folgender Geraden unter der Abbildung T aus a). Geben Sie dazu jeweils eine genaue Begründung an.

A) $g_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}\,.$

B) $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 8 - \mathrm{Re}\,(z)\}\,.$

C) $g_3 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)\}\,.$

(ii) Auf welche Menge wird dann das Innere des Dreiecks mit den Ecken $0,\ 8,\ 4+4i$ abgebildet? Fertigen Sie Skizzen der Urbild- und Bildebene an!

Lösungsskizze zur Aufgabe 1)

a) $T(4) = 0,\ T(8) = \infty \Longrightarrow T(z) = a \cdot \dfrac{z-4}{z-8}\,.$

$T(0) = \frac{a}{2} = 2i \Longrightarrow T(z) = 4i \cdot \dfrac{z-4}{z-8}\,.$

b) (i) Verallgemeinerte Kreise durch 8 werden auf Geraden abgebildet.

A) Also ist das Bild der reellen Achse eine Gerade, wobei

$$T(0) = 2i, \quad T(4) = 0$$

gilt. Es ist also $T(\mathbb{R}) = i \cdot \mathbb{R}\,.$

B) Das Bild von $g_2 = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 8 - \mathrm{Re}\,(z)\}$ ist wegen $8 \in g_2$ ebenfalls eine Gerade. Es gilt

$T(8i) = 4i \cdot \dfrac{8i-4}{8i-8} = 2i \cdot \dfrac{2i-1}{i-1} = 2i \cdot \dfrac{(2i-1)(-i-1)}{-i^2+1^2} = 1+3i$

und

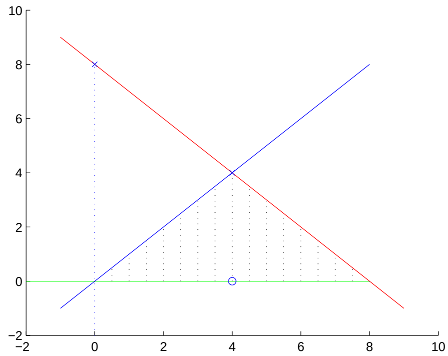
$T(4+4i) = 4i \cdot \dfrac{4i}{4i-4} = -4 \cdot \dfrac{-i-1}{-i^2+1^2} = 2+2i\,.$

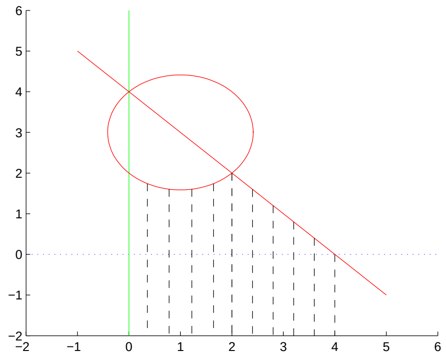
$T(g_2) = \{z \in \mathbb{C}^* \,:\, \mathrm{Im}\,(z) = 4 - \mathrm{Re}\,(z)\}\,.$

C) Das Bild von g_3 ist ein echter Kreis K da $8 \notin g_3\,.$
Der Bildkreis geht durch die Punkte
$T(4+4i) = 2+2i, T(0) = 2i, T(\infty) = 4i$
Der Mittelpunkt liegt auf der Mittelsenkrechten auf die Verbindung von $2+2i$ und $2i$. Also ist $M = 1+ib\,.$

Der Mittelpunkt liegt auf der Mittelsenkrechten auf die Verbindung von $4i$ und $2i$. Also ist $M = 1 + 3i$.
Für den Radius rechnet man zum Beispiel: $R = \sqrt{(-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$.

(ii) Das Dreieck wird begrenzt durch die Geraden g_1, g_2, g_3. Das Bild wird also durch die Bilder dieser Geraden begrenzt.
Wegen $T(4+i) = \frac{8}{5}(1+i)$ erhält man als Bild, die Punkte $w = u + iv$ mit: $v > 0,\ v < 4 - u,\ |w - (1+3i)| > \sqrt{2}$.





Aufgabe 2:

Zur Lösung zweier Potentialprobleme sollen folgende Transformationen durchgeführt werden:

a) Das Gebiet außerhalb der beiden Kreisscheiben
$\tilde{K}_1 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - \frac{5}{2}| \,\leq\, \frac{3}{2}\right\}$, und
$\tilde{K}_2 := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z + \frac{5}{2}| \,\leq\, \frac{3}{2}\right\}$
soll auf das Innere eines Kreisringes um Null abgebildet werden.

b) Das Gebiet zwischen den durch $z = x + iy$ mit

$$\frac{4x^2}{3} - 4y^2 \;=\; 1 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \;=\; 1$$

definierten Hyperbelzweigen soll auf das Innere eines Streifens der Form

$$S := \{z \in \mathbb{C} : \, -c < \operatorname{Im} z < c; \;\; \text{mit einer festen reelen Zahl } c > 0\}$$

abgebildet werden.

Geben Sie geeignete Transformationen an.

Tipp zu a: Möbius-Transformation, Vorlesungsfolien 75, 76

Tipp zu b: Umkehrung der Jukowski-Funktion, Logarithmus.

Lösung zur Aufgabe 2:

a) Man kann direkt Foliendie 75, 76 der Vorlesung nutzen, oder selbst wie folgt herleiten.

Es seien K_1 und K_2 die Ränder von $\tilde{K}_1$ und $\tilde{K}_2$. Wir verwenden eine Möbiustransformation, die diese beiden Kreise auf zwei konzentrische Bildkreise abgebildet.

Im Bild sind Null und der unendlich ferne Punkt symmetrisch zu beiden Bildkreisen. Sie müssen daher die Bilder derjenigen zwei Punkte p_1, p_2 sein, die im Urbild symmetrisch zu beiden Kreisen K_1 und K_2 sind. Die gesuchten Punkte p_1 und p_2 liegen auf der Verbindungstrcke der beiden Mittelpunkte von K_1 und K_2 also auf der reellen Achse. Aufgrund der symmetrischen Lage der beiden Kreise zur imaginären Achse gilt $p_2 = -p_1 =: p$. Die Bedingung der Symmetrie bzgl. K_2 lautet nun:

$$(p - \frac{5}{2}) \cdot (-p - \frac{5}{2})) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow p^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4\,.$$

Wir wählen $p_1 = -2$ und $p_2 = 2$.

Für $T(z) := \dfrac{z-2}{z+2}$ gilt

- Die reelle Achse wird auf die reelle Achse abgebildet.

- Die Kreise K_1 und K_2 werden auf echte Kreise abgebildet, die symmetrisch zum Bild der reellen Achse liegen. Die Mittelpunkte der Bildkreise liegen also auf $\mathbb{R} = T(\mathbb{R})$.
- Es gilt:
  $T(-4) := \dfrac{-4-2}{-4+2} = 3,\ T(-1) := \dfrac{-1-2}{-1+2} = -3\,.$

  Das Bild von K_1 ist der Kreis mit Radius 3 um 0.
  $T(4) := \dfrac{4-2}{4+2} = \frac{1}{3},\ T(1) := \dfrac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}\,.$

  Das Bild von K_2 ist der Kreis mit Radius $\frac{1}{3}$ um 0.
  Wegen $T(0) = -1$ wird das Gebiet zwischen den beiden Kreisscheiben auf das folgende Ringgebiet abgebildet:
  $R := \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{3} < |z| < 3\right\},$

b) Es sei $J : \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ die Jukowski Funktion auf der Oberen komplexen Halbebene. Dann bildet $J^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ die Hyperbelzweige auf Strahlen mit

$$\cos(\phi_{1,2}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin(\phi_{1,2}) = \frac{1}{2}$$

Als Bilder der Hyperbeläste erhalten wir also die Strahlen $re^{i\frac{\pi}{6}}$ und $re^{i\frac{5\pi}{6}}$. Wegen $J^{-1}(0) = i$ wird das Gebiet zwischen den Hyperbelästen auf den Sektor

$$S_1 = \left\{z \in \mathbb{C} :\ z = re^{i\phi},\ \frac{\pi}{6} < \phi < \frac{5\pi}{6}\right\}$$

abgebildet.

Wir drehen nun um $-\frac{\pi}{2}$ indem wir mit $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ multiplizieren und erhalten

$$S_2 = \left\{z \in \mathbb{C} :\ z = re^{i\phi},\ -\frac{\pi}{3} < \phi < \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Jetzt wenden wir noch die Logarithmus Funktion an und erhalten insgesamt

$$f(z) = \mathrm{Log}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} J^{-1}(z)\right)\,.$$

Es gilt

$$\mathrm{Re}\,(f(z)) = \mathrm{Log}\,|J^{-1}(z)| \in (0,\infty), \qquad \mathrm{Im}\,(f(z)) = \arg\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} J^{-1}(z)\right) \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right).$$

Es gibt viele andere Möglichkeiten das Ziel zu erreichen, zum Beispiel $\tilde{f}(z) := \mathrm{Log}(J^{-1}(z)) - i\,.$

Abgabe bis: 5.6.15