Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2 : Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

1. Gegeben seien die Rechtecke:

   $R_1 := \{z \in \mathbb{C} : \ z = x + iy, \, x \in [0, \log(2)], \, y \in [\pi, 2\pi]\}$ und
   $R_2 := \{z \in \mathbb{C} : \ z = x + iy, \, x \in [0, \log(2)], \, y \in [-2\pi, -\pi]\}$.

   Bestimmen Sie die Bilder der beiden Rechtecke unter der Abbildung $f(z) = e^z$.

2. Überprüfen Sie die Gültigkeit der Gleichungen $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ in $\mathbb{C}$.

Lösung zu Aufgabe 1:

1. Für das Bild von R_1 gilt:

   $|e^z| = e^x \in \left[e^0, e^{\log 2}\right] = [1, 2]$.

   Für die Argumente der Bildpunkte gilt

   $\arg\left(f(z)\right) = \arg\left(e^x \cdot e^{iy}\right) = \arg\left(e^{iy}\right) = y \in [\pi, 2\pi]$.

   Das Bild ist die untere Hälfte des Kreisringes um Null mit Innenradius 1 und Außenradius 2.

   Für R_2 erhält man die gleichen Beträge der Bildpunkte aber die Argumente liegen in $[-2\pi, -\pi]$. Das Bild ist die obere Hälfte des Kreisringes um Null mit Innenradius 1 und Außenradius 2.

2. $$\begin{aligned} \exp(x - iy) &= e^x \cdot e^{i(-y)} = e^x \cdot \left(\cos(-y) + i \sin(-y)\right) \\ &= e^x \cdot \left(\cos(y) - i \sin(y)\right) = e^x \cdot \overline{e^{i\,y}} = \overline{e^z} \, . \end{aligned}$$

   Die Gleichungen kann auch völlig anders begründet werden. Zum Beispiel geometrisch:

   Bei Berechnung von $\exp(x-iy)$ ergibt sich mit e^x der gleiche Betrag, wie bei der Berechnung von $\exp(x+iy)$. Der Cosinus des Arguments bleibt ebenfalls unverändert. Dagegen ändert sich das Vorzeichen vom Sinus des Arguments. Dies entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse.

Aufgabe 2:

1. Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Keil
$\left\{z \in \mathbb{C} : \, z = re^{i\phi}, \, r \in (0,\infty), \, -\frac{\pi}{2} < \phi < -\frac{\pi}{6}\right\}$
auf die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ abbildet.

2. Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Keil $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ so auf den Parallelstreifen $-c < \operatorname{Im} z < c$; $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 1$ abbildet, dass die Symmetrie bezüglich der reellen Achse erhalten bleibt und der Punkt $z = 1$ in $w = 1$ übergeht. Zeichnen Sie die Bilder der Strahlen $\arg z = +\frac{\pi}{3c}, -\frac{\pi}{3c}, +\frac{\pi}{6c}, -\frac{\pi}{6c}$ und die Bilder der Kreisabschnitte mit $|z| = e^{\frac{\pi}{3c}}, e^{\frac{\pi}{6c}}$ und $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$.

Lösung zu Aufgabe 2:

1. Eine der vielen möglichen Transformationen ist

$$z \to \hat{z} := e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot z \qquad \text{Bild: Keil symmetrisch zum Strahl } \phi = 0$$

$$\hat{z} \to \tilde{z} := (\hat{z})^3 \qquad \text{Bild: rechte Halbebene } x > 0$$

$$\tilde{z} \to w := e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \tilde{z} \qquad \text{Bild: obere Halbebene } y > 0\,.$$

2. Ziel: Keil K : $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3} \longrightarrow$ Parallelstreifen P : $-c < \operatorname{Im} z < c$; $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 1$

   - Keil auf Streifen geht mit Log:
     $f_1(z) = \operatorname{Log}(z) = \log|z| + i\arg(z) =: \tilde{w} \implies f_1(K) : -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Im}(\tilde{w}) < \frac{\pi}{3}$.
     Wähle also $f_2(z) = \frac{3c}{\pi}\operatorname{Log}(z) = \hat{w}$.
     Dann gilt $-c < \operatorname{Im}(\hat{w}) < c$.
   - Es soll gelten $f(1) = 1$. Hier gilt aber $f_2(1) = 0$!
     Also schieben wir etwas in Richtung der reellen Achse. $f(z) := 1 + f_2(z)$.
     An den Imaginärteilen ändert sich nichts, aber jetzt gilt $f(1) = 1$.
   - Symmetrie bezüglich der reellen Achse soll erhalten bleiben, d.h. $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
     $f(\overline{z}) = 1 + f_2(\overline{z}) = 1 + \frac{3c}{\pi}\left[\log|z| - i\arg(z)\right] = \overline{f(z)}$

     Die Funktion $\boxed{f(z) := 1 + \frac{3c}{\pi}\operatorname{Log}(z) = 1 + \frac{3c}{\pi}\left[\log|z| + i\arg(z)\right]}$ erfüllt also alle Vorgaben aus der Aufgabenstellung.
   - Bild von $\arg(z) = \alpha$: Gerade $\operatorname{Im}(z) = \alpha \cdot \frac{3c}{\pi}$
     Die Bilder der Strahlen $\arg z = +\frac{\pi}{3c}, -\frac{\pi}{3c}, +\frac{\pi}{6c}, -\frac{\pi}{6c}$ sind also die Geraden $\operatorname{Im}(z) = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

- Bilder von Kreisabschnitten mit $|z| = r$

  $f(z) = \underbrace{1 + \frac{3c}{\pi}\log(r)}_{\text{Realteil konst.}} + \underbrace{\frac{3c}{\pi} i \arg(z)}_{(*)}$

  $(*)$ Imaginärteil liegt zwischen $\frac{3c}{\pi}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ und $\frac{3c}{\pi}\left(+\frac{\pi}{3}\right)$ also $\mathrm{Im}(w) \in (-c, c)$

  Das Bild von $|z| = e^{\frac{\pi}{3c}}$ erfüllt $\mathrm{Re}(w) = 2\,,\ -c < \mathrm{Im}(w) < c$

  Das Bild von $|z| = e^{\frac{\pi}{6c}}$ erfüllt $\mathrm{Re}(w) = \frac{3}{2}\,,\ -c < \mathrm{Im}(w) < c$

Bearbeitungstermine: 27.4.15 - 1.5.15