Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. A. Iske, Dr. P. Kiani

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2 : Hausaufgaben

Aufgabe 1:

1. Zeigen Sie, dass alle 19 (warum nicht 20?) Lösungen der Gleichung
$$(z-4)^{20} = z^{20}$$
auf der Geraden $\operatorname{Re}(z) = 2$ liegen.
2. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $(z-1)^i = z^i$?
3. Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$\operatorname{Log}(-z) \neq \operatorname{Log}(z)$ gilt.
4. Was ist falsch an folgender Argumentation von Johann Bernoulli:
$$(-z)^2 = z^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Log}((-z)^2) = \operatorname{Log}(z^2) \Longleftrightarrow$$
$$2\operatorname{Log}(-z) = 2\operatorname{Log}(z) \Longleftrightarrow \operatorname{Log}(-z) = \operatorname{Log}(z)\,?$$

Lösung zu Aufgabe 1)

1. $$(z-4)^{20} = z^{20} \Longrightarrow |(z-4)^{20}| = |z^{20}| \Longrightarrow |z-4|^{20} = |z|^{20}$$
d.h. z hat den gleichen Abstand von 4 und 0. z liegt also auf der Mittelsenkrechten der Verbindung von 0 und 4. Da $p(z) := (z-4)^{20} - z^{20}$ ein Polynom 19-ten Grades ist, hat es 19 Nullstellen.
2. $(z-1)^i = z^i$?
$$z^i = \exp(\operatorname{Log}(z)\cdot i) = \exp(i\cdot \log(|z|) - \arg(z)) =: w$$
liefert
$$|w| = e^{-\arg(z)}, \qquad \arg(w) = \log(|z|) + 2k\pi \text{ für geeignetes } k \in \mathbb{Z}.$$
$\tilde{w} := (z-1)^i = z^i \Longrightarrow e^{-\arg(z)} = e^{-\arg(z-1)} \Longrightarrow \arg(z) = \arg(z-1) \Longrightarrow z \in \mathbb{R}\setminus[0,1]$
Nun müssen die Argumente der Bilder noch stimmen. Für $z \in]1,\infty[$ heißt das, dass ein $k \in \mathbb{N}$ existieren muss, so dass
$$\arg\tilde{w} := \log(z-1) + 2k\pi = \log(z) = \arg w \Longrightarrow \log\left(\frac{z-1}{z}\right) = -2k\pi \Longrightarrow 1 - \frac{1}{z} = e^{-2k\pi}$$
Es gibt also unendlich viele Lösungen, unter anderen
$$z_k = \frac{1}{1-e^{-2k\pi}} \quad k \in \mathbb{N}$$
Für negative z erhält man analog die obigen Lösungen allerdings mit $k \in \mathbb{Z}^-$.

3.
$$\mathrm{Log}(z) \;=\; \mathrm{Log}(|z|) \;+\; i\arg(z) \;\neq\; \mathrm{Log}(-z) \;=\; \mathrm{Log}(|z|) \;+\; i\arg(-z)$$
denn es gibt keine komplexe Zahl mit $\arg(z) = \arg(-z)$.

4. Falsch an der Argumentation
$$(-z)^2 \;=\; z^2 \iff \mathrm{Log}((-z)^2) \;=\; \mathrm{Log}(z^2)$$
$$2\,\mathrm{Log}(-z) \;=\; 2\,\mathrm{Log}(z) \iff \mathrm{Log}(-z) \;=\; \mathrm{Log}(z)\,?$$
ist, dass für den Hauptwert der Logarithmusfunktion in $\mathbb{C}$
$$\mathrm{Log}(z^2) = 2\,\mathrm{Log}(z)$$
nur gilt, wenn für den Hauptwert des Arguments
$$|\arg(z)| \;<\; \frac{\pi}{2}$$
gilt. Es ist z.B.
$$\mathrm{Log}(e^{i\frac{3\pi}{4}}) = i\,\frac{3\pi}{4}, \qquad \mathrm{Log}\left((e^{i\frac{3\pi}{4}})^2\right) \;=\; \mathrm{Log}(e^{i\frac{3\pi}{2}}) \;=\; -\,i\,\frac{\pi}{2} \neq i\,\frac{3\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 2:

Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Streifen

$S := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) - \sqrt{2} \,<\, \mathrm{Im}\,(z) \,<\, \mathrm{Re}\,(z) + \sqrt{2} \right\}$

auf den Kreisring $R := \{ z \in \mathbb{C} \,:\, 1 \,<\, |z| \,<\, 2 \}$ abbildet. Die Funktion soll dabei nicht direkt auf den Real- oder den Imaginärteil von z sondern nur auf z selbst zugreifen.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze von S an, und transformieren Sie zunächst auf einen achsenparallelen Streifen $\tilde{S}$.

Lösungsskizze zu 2:

Der Streifen wird begrenzt durch zwei Geraden:

$g_1 : \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z) - \sqrt{2}$

$g_2 : \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z) + \sqrt{2}$

Wir können zur y-Achse parallele Streifen auf Ringe abbilden. Also drehen wir zunächst

Schritt 1 : Drehen um $\pi/4$

$f_1(z) = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z\,.$

Die Punkte $P_1 = 0 - i\sqrt{2}$, $P_2 = \sqrt{2}$ liegen auf g_1 und werden auf $1 \pm i$ abgebildet. Daher gilt

$f_1(g_1) = g_3 = \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = 1 \}\,.$

Analog erhält man: $f_1(g_2) = g_3 = \{ z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,(z) = -1 \}\,.$

$f_1(S) = \{ w = u + iv \,:\, -1 < u < 1,\, -\infty < v < \infty \} = \tilde{S}$

Wenn wir die Exponentialfunktion direkt auf den Bildstreifen anwenden, erhalten wir:

$\exp(f_1(z)) = \exp(u + iv) = e^u \cdot e^{iv}$

$\exp(\tilde{S}) :$ Kreisring mit Innenradius e^{-1} , Außenradius e^1

Ziel: Innenradius $1 = e^0$ und Außenradius $= 2 = e^{\log 2}$.

Schritt 2: Wir verschieben den Streifen

$f_2(z) := z + 1$

$f_2 \circ f_1(S) = \{ w = u + iv \,:\, 0 < u < 2,\, -\infty < v < \infty \} = \tilde{S}$

Schritt 3: Jetzt skalieren wir

$f_3(z) := \frac{\log(2)}{2} \cdot f_2 \circ f_1(z)$

$f_3(S) = \{w = u + iv \,:\, 0 < u < \log(2),\, -\infty < v < \infty\}$

Schritt 4: Streifen $\longrightarrow$ Ring

$f_4(z) := \exp(f_3(z)) = \exp(u + iv) = e^u \cdot e^{iv}$

$f_4(S)$: Kreisring mit Innenradius 1, Außenradius 2 um Null.

Bemerkung: Ein Vorschlag der Form $f(z) = e^{i\mathrm{Im}\,(f_1(z))} \cdot \frac{(3+\mathrm{Re}\,(f_1(z)))}{2}$ führt auch zum Ziel. Mit etwas mehr Übung neigt man aber eher dazu in Funktionsvorschriften $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\,(z)$, $\bar{z}$ möglichst zu meiden. Meist sind die so erhaltenen Funktionen nicht differenzierbar (siehe Blatt 4).

Abgabe bis: 15.5.15