Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2012**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Für die folgenden Funktionen

$$\text{a)}\quad f(z) = \frac{z^2+z-2}{z^3-2z^2}, \qquad \text{b)}\quad f(z) = \frac{1+z-\exp(z)}{z^4},$$

$$\text{c)}\quad f(z) = \cosh\frac{1}{z} - \sinh\frac{1}{z}, \qquad \text{d)}\quad f(z) = \frac{z-\pi}{\sin z}\,.$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten vier (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 22:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{25}{z^4 - z^2 - 2z + 2}\,.$$

a) Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint\limits_c f(z)\,dz$$

für den Kreis $c:\ |z+2| = 2\,.$

Aufgabe 23:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6}\, dx,$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324}\, dx$ und

c) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 3x - 4)\sqrt{x + 2}}\, dx\ .$

Aufgabe 24:

Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{4 + \cos\varphi}\, d\varphi\ ,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{d\varphi}{2 + \cos^2\varphi}\ .$

Hinweis: Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ bzw. } \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Abgabetermin: 2.7.-6.7. (zu Beginn der Übung)