Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2012**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet D (vgl. Aufgabe 12).

Man berechne eine auf D harmonische Funktion, die auf K_1 den Wert 1 und auf K_2 den Wert 2 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 12 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 14:

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2+3it}\, dt\,,$

b) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{4it+3}\, dt\,,$

c) $\displaystyle\int_{c_{1,2}} 4z + 5\bar{z}\, dz\,,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg von $z_1 = -i$ nach $z_2 = i$ und c_2 der in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Ursprungshalbreis der auch z_1 und z_2 verbindet,

d) $\displaystyle\oint_c 6\bar{z} - 5\, dz$

für den im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Rand c des Quadrates mit den Eckpunkten $\pm 1 \pm i$.

Aufgabe 15:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\int\limits_c z^3 + 4\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $1-i$ nach $1+i$,

b) $\int\limits_c z\cosh z\,dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \le t \le 1$,

c) $\int\limits_{-i}^{i} \sin z\,dz$ für $c(t) = it$, $-1 \le t \le 1$,

d) $\int\limits_{1}^{i} \ln z\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{5-3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0 , ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2 - 2z + 2}$, $z_0 = -1$ und $z_0 = -1 - i$,

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}$, $z_0 = \dfrac{7i}{2}$,

(iii) $f(z) = \ln(3z+5)$, $z_0 = 0$ und $z_0 = i$.

Abgabetermin: 4.6.- 8.6. (zu Beginn der Übung)