Aufgabe 1)

a) Sei i die imaginäre Einheit,

$$R := \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3, \operatorname{Im}(z) > 0 \} .$$

und

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) := \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \ln(z)$$

i) Bestimmen Sie das Bild von R unter der Abbildung f und fertigen Sie Skizzen von R und dem Bild von R unter f an.

ii) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $f(z) = \frac{\pi}{4}$.

b) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\quad T(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit

$$T(4i) = \infty, \qquad T(0) = -1, \qquad T(\infty) = 2 .$$

c) Bestimmen Sie die Bilder der folgenden verallgemeinerten Kreise unter der Transformation T aus Aufgabenteil b).

(i) $K_1 :=$ imaginäre Achse,

(ii) $K_2 := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 4 \}$,

(iii) $\tilde{K}_3 :=$ reelle Achse.

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei $\qquad f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 10}$.

(i) Berechnen Sie die Residuen von f in allen isolierten Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie folgende Integrale

$$\oint_{C_1} f(z)\, dz, \qquad C_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_1(t) = 4 + e^{it},$$

$$\oint_{C_2} f(z)\, dz, \qquad C_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ C_2(t) = -i + 3\, e^{-it},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx .$$

b) Bestimmen Sie diejenige Laurent–Entwicklung von

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die in einer Umgebung des Punktes $z^* = 4$ gegen $g(z)$ konvergiert.

Viel Erfolg!