

Komplexe Fkt. Vo 16.4.10

$z = x + iy$

kompl. Fkt. $w = u + iv = u(x,y) + i v(x,y)$

z.B. $w = e^z = e^{x+iy} = e^x (e^{iy}) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$

z.B. $x = at$

Umkehrabb. $w = z^k$

Umkehrabb. $z = \sqrt[k]{w}$

Apr 16-08:58

Der komplexe Logarithmus $w = ? \log z$

Es gilt:

$$e^{w} = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v)$$

und

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Setzen wir nun $e^w = z$, so folgt mit den obigen Beziehungen

$$e^u = |z| \wedge v = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Die Menge der Lösungen w mit $e^w = z, z \in \mathbb{C}$ ist daher gegeben durch

$$\Delta \log z := \{ \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z} \}$$

Diese Menge nennt man den komplexen Logarithmus und ist für alle $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, definiert.

Apr 16-09:18

$w = \log z = u + iv$

$u = \ln |z|$

$v = \arg z + 2\pi k$

Apr 16-09:18

Joukowski Fkt.

Abwärtspfeil:

Apr 16-09:28

Die Joukowski-Funktion

Wir betrachten die komplexe Funktion $w = f(z)$ definiert durch

$$w = f(z) = \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{z} \right)$$

Offensichtlich gilt:

$$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

$w = f(z) = \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$

$0 = \frac{z^2 + 1}{2z} \Rightarrow z^2 + 1 = 0 \Rightarrow (z-i)(z+i) = 0$

$\Rightarrow z = i \vee z = -i$

allgemein $z = u + iv$

Apr 16-09:34

Weiter definieren wir

$$z_n = \infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} = 0 \Leftrightarrow (z_n) \rightarrow +\infty$$

für $z_n \in \mathbb{C}, z_n \neq 0, n \geq n_0$

$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{r_n} e^{-i\varphi_n} = \frac{1}{|z_n|} e^{-i\varphi_n}$$

Schritt

$z = u + iv$

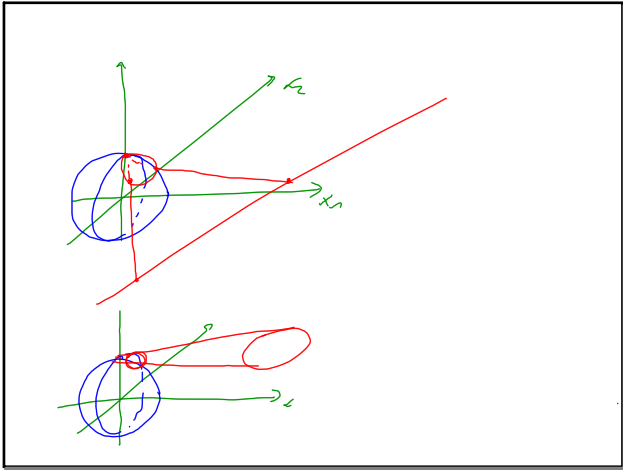
$w = \frac{z^2 + 1}{2z}$

$Re(w) = \frac{u^2 - v^2 + 1}{2(u^2 + v^2)}$

$Im(w) = \frac{2uv}{2(u^2 + v^2)}$

$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-i} + \frac{\bar{z}}{1+i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{z(1+i) + \bar{z}(1-i)}{(1-i)(1+i)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{z(1+i) + \bar{z}(1-i)}{2} \right) = \frac{z(1+i) + \bar{z}(1-i)}{4}$

Apr 16-10:01



Apr 16-10:21