

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

- a) Man bestimme das Bild von

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 16 \leq |z| \leq 25, \pi/2 \leq \arg(z) < \pi\}$$

unter der durch $f(z) := \ln(\sqrt{z})$ definierten Abbildung. Dabei sind für \sqrt{z} und $\ln w$ die jeweils zugehörigen Hauptwerte zu wählen.

- b) Man berechne für $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ und $z_2 = -\sqrt{3} + i$

- (i) $\ln(z_1)$,
- (ii) $\ln(z_2)$,
- (iii) $\ln(z_1) + \ln(z_2)$
- (iv) $\ln(z_1 z_2)$

und überprüfe, ob die folgende Beziehung gilt

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2),$$

wobei $\ln z$ der Hauptwert des Logarithmus ist.

Aufgabe 6:

- a) Die \sin -Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\sin z$ und bestimme alle Lösungen von $\sin z = 2$.

- b) Gegeben seien die Punkte

$$z_1 = 1, z_2 = 1 + 2i, z_3 = i$$

und

$$w_1 = 0, w_2 = 1 + i, w_3 = -1 - i.$$

- (i) Man berechne die Möbius-Transformation T , für die mit $j = 1, 2, 3$ gilt:

$$w_j = T(z_j).$$

- (ii) Liegen $z_0 = 2 + i$ und z_1, z_2, z_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis?
- (iii) Liegen $w_0 = T(z_0)$ und w_1, w_2, w_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis?

Aufgabe 7:

Für die Inversion $w = f(z) := \frac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

- a) der Geraden $\operatorname{Re}(z) = -1$,
- b) des Strahls $\operatorname{Im}(z) > 0 \wedge \operatorname{Re}(z) = 0$,
- c) des Kreises $|z| = 4$,
- d) des Kreises $|z - 1| = 1$ und
- e) des Kreises $|z - 1| = 3$.

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Funktion $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$T(z) = \frac{2(1+i)z}{z-1-i}.$$

- a) Man überprüfe, ob es sich bei T um eine Möbiustransformation handelt.
- b) Man berechne alle Fixpunkte von T in kartesischer und Polardarstellung.
- c) Man bestimme das Bild der Winkelhalbierenden $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.
- d) Worauf wird die Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden abgebildet?
- e) Man berechne die Umkehrabbildung von T .

Abgabetermin: 4.5.-6.5. (zu Beginn der Übung)