7 Fourier-Transformation

Ausgangspunkt: Die bereits bekannte Fourier-Reihenentwicklung einer T-periodischen, stückweise stetig differenzierbaren Funktion $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{mit Frequenz } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

und mit Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f_T(\tau)e^{-ik\omega\tau}\,d\tau \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau)e^{-ik\omega\tau}\,d\tau \qquad \text{für } k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \end{aligned}$$

Interpretationen und Begriffe.

- f_T fassen wir auf als ein zeitkontinuierliches T-periodisches `Signal`.
- Dann stellt der Fourier-Koeffizient γ_k den Verstärkungsfaktor für die `Grundschwingung` $e^{-ik\omega\tau}$ zur `Frequenz`

$$\omega_k = k\frac{2\pi}{T} \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

dar.

- Somit beschreiben die γ_k die `Amplituden` der beteiligten Schwingungen.
- Die Folge $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ wird als `Spektrum` von f_T bezeichnet.
- Das Spektrum ist eine diskrete Menge von Fourier-Koeffizienten.
- Ist das Spektrum endlich, so sind die Frequenzen der beteiligten Schwingungen beschränkt (und umgekehrt). □

Alternative Darstellung der Fourier-Reihe.

Ausgangspunkt: Wir schreiben die Frequenz ω als

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega$$

Alternative Darstellung: Dann kann die Fourier-Reihe dargestellt werden als

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{i\omega_k(t-\tau)}\, d\tau \cdot \Delta\omega.$$

Fragen:

- Besitzt ein `nicht-periodisches` Signal $f(t)$ eine entsprechende Fourier-Darstellung? Etwa eine Fourier-Reihe? Oder etwas anderes?
- Falls ja, unter welchen Voraussetzungen?
- Wie sieht das Spektrum dann aus?

Herleitung der gewünschten Fourier-Darstellung.

Grundidee: Fasse *nicht-periodisches* Signal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Signal mit *unendlicher* Periode auf, d.h. wir betrachten den Grenzübergang

$$f(t) = \lim_{T \to \infty} f_T(t)$$

mit einer (geeigneten) T-periodischen Funktion f_T.

- Setzt man hierzu

$$g_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau,$$

so bekommt man die Darstellung

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_T(\omega_k) e^{i\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k).$$

- **Beachte:** Dies ist eine Riemannsche Summe mit Zerlegung $\{\omega_k\}_k$, die für große Perioden T beliebig fein werden kann.

So bekommen wir eine Fourier-Integraldarstellung.

Setze

$$g(\omega) := \lim_{T\to\infty} g_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau. \qquad \text{für } \omega \in \mathbb{R}.$$

Definition: *Falls das Integral*

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, so wird die Funktion g als Fourier-Transformierte *der Funktion f bezeichnet.* □

Vermutung: Es gilt (mit $T \to \infty$) die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

bzw.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega(t-\omega)}\,d\tau\,d\omega.$$

Wann gilt die Fourier-Umkehrformel?

Satz: *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sei auf jedem endlichen reellen Intervall stückweise stetig. Weiterhin besitze* f *in jedem Punkt eine linksseitige und rechtsseitige Ableitung und es existiere das Integral*

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt.$$

Dann gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)}\, d\tau\, d\omega.$$

Falls f *bei* $t_0 \in \mathbb{R}$ *unstetig ist, so liefert das Doppelintegral auf der rechten Seite der Fourier-Umkehrformel für* $t = t_0$ *den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwertes von* f *für* $t \to t_0$, *d.h. es gilt*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t \nearrow t_0} f(t) + \lim_{t \searrow t_0} f(t) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t_0-\omega)}\, d\tau\, d\omega.$$

$\square$

Diskrete/Kontinuierliche Fourier-Transformation.

Diskrete Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Reihendarstellung

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit diskreten Fourier-Koeffizienten

$$\gamma_k \equiv \gamma_k(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau) e^{-ik\omega\tau} \, d\tau \qquad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Kontinuierliche Fourier-Transformation: Es gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega.$$

mit der kontinuierlichen Fourier-Transformation

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau$$

$\square$

Beispiel. Berechne die Fourier-Transformation $\hat{f}$ des Rechtecksimpulses

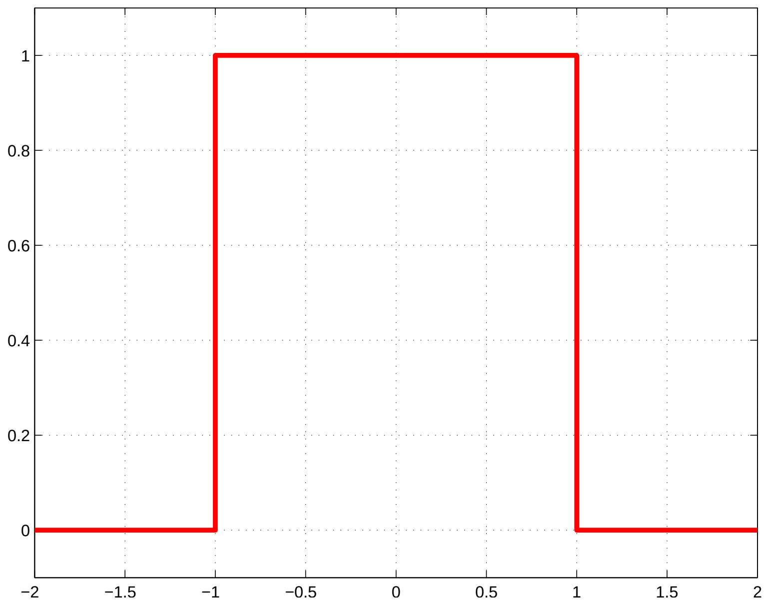
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a \le t \le a; \\ 0 & \text{für } |t| > a. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\, dt \\
&= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{t=-a}^{t=a} = -\frac{1}{i\omega}\left[e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right] \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{\omega}\sin(\omega a) & \text{für } z \neq 0 \\ 2a & \text{für } z = 0 \end{array} \right\} = 2a \cdot \operatorname{sinc}(\omega a)
\end{aligned}$$

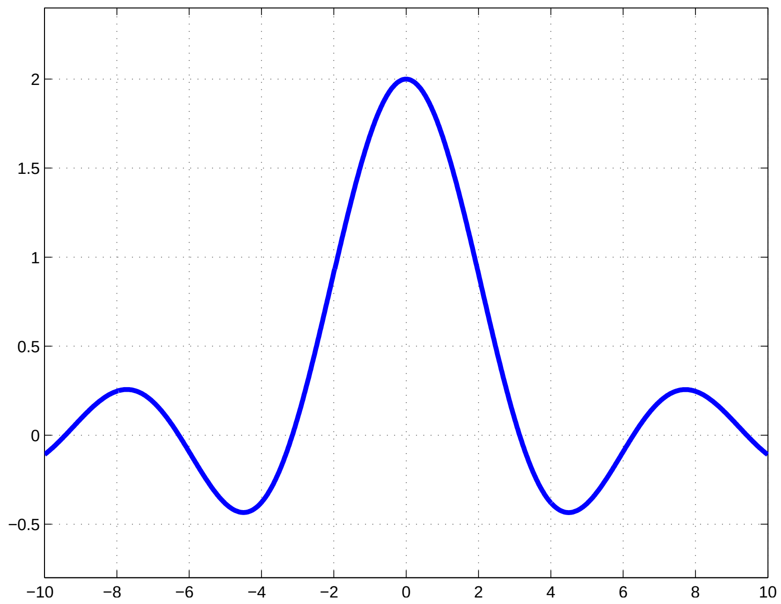
mit der sinc-Funktion

$$\operatorname{sinc}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}\sin(z) & \text{für } z \neq 0; \\ 1 & \text{für } z = 0; \end{cases}$$

Graphen von Einheitsimpuls und Sinc-Funktion.



Der Einheitsimpuls $f(t)$**.**



Die sinc-Funktion $\widehat{f}(\omega)$**.**

Beispiel. Berechne die entsprechende Fourier-Umkehrung von

$$\hat{f}(\omega) = 2a\operatorname{sinc}(\omega a)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a)\cos(\omega t)}{\omega}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega(a+t)) + \sin(\omega(a-t))}{\omega}\, d\omega
\end{aligned}$$

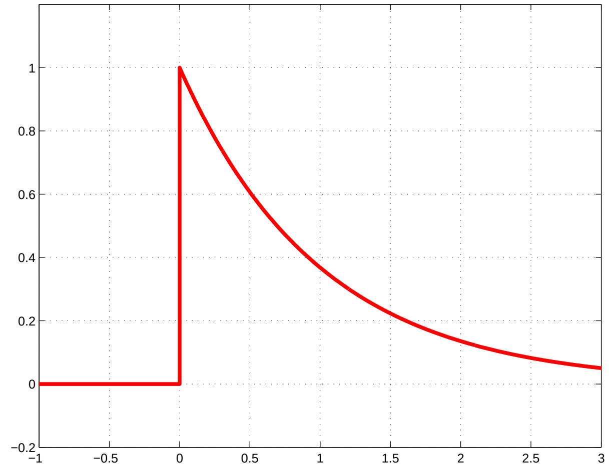
Übung: Verwende den Residuensatz, um Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t}\, dt$$

zu berechnen. Zeige dann die Fourier-Umkehrformel $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](t) = f(t)$. $\square$

Beispiel. Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation $\hat{f}$ von

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{für } t \geq 0; \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$



Graph von f.

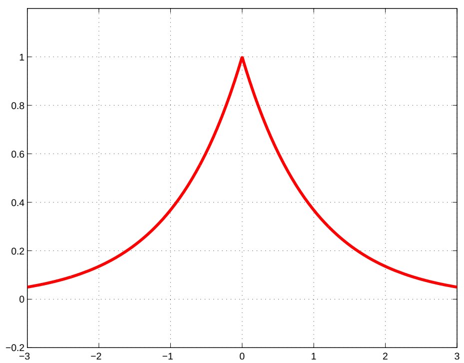
$$\begin{aligned} F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t}\, dt \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{a+i\omega}. \end{aligned}$$

Beispiel.

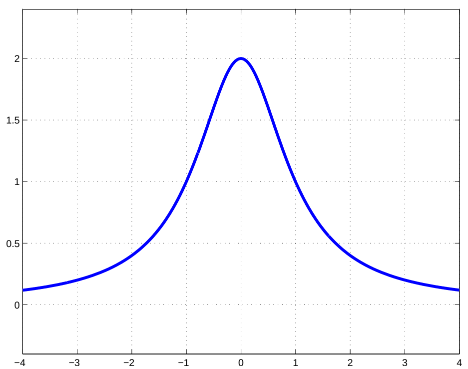
Berechne für $a > 0$ die Fourier-Transformation $\widehat{f}$ von

$$f(t) = e^{-a|t|}.$$

$$\begin{aligned} F[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{(a+i\omega)t}\, dt \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}. \end{aligned}$$



Grpah von $f(t)$.



Graph von $\widehat{f}$.

Bemerkungen zur Fourier-Transformation.

- Zerlegt man die Fourier-Transformation der *reellen* Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Realteil und (verschwindenden!) Imaginärteil, so folgt mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin[\omega(t-\tau)] \, d\tau \, d\omega = 0$$

die trigonometrische Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos[\omega(t-\tau)] \, d\tau \, d\omega$$

- Falls f eine gerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega t) \cos(\omega \tau) \, d\tau \, d\omega.$$

- Falls f eine ungerade Funktion ist, so gilt die Darstellung

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega t) \sin(\omega \tau) \, d\tau \, d\omega.$$

$\square$

Rechenregeln zur Fourier-Transformation.

Ausgangspunkt: Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

- $\mathcal{F}$ ist ein linearer Integraloperator bzw. Integraltransformation, d.h.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f+g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) + \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[\alpha f](\omega) &= \alpha\mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Für die Konjugation $\overline{f}$ von f gilt

$$\mathcal{F}[\overline{f}](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f(-t)](\omega)}.$$

- Für die Streckung $f(c\cdot)$, $c > 0$, von f gilt

$$\mathcal{F}[f(ct)](\omega) = \frac{1}{c}\mathcal{F}[f](\omega/c).$$

Weitere Rechenregeln zur Fourier-Transformation.

- **Verschiebungssätze:** Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t-a)](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega) \\ \mathcal{F}[e^{iat}f(t)](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega - a) \end{aligned}$$

- **Faltungssätze:** Für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ ist die Faltung $f * g$ zwischen f und g definiert durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Es gelten die Faltungssätze

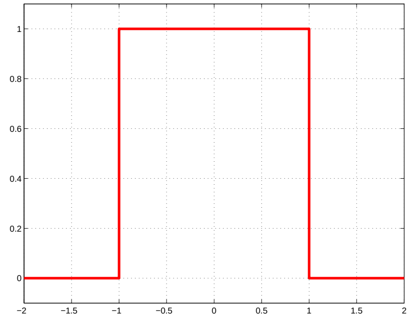
$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega) \\ \mathcal{F}[f \cdot g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(\omega) \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel.

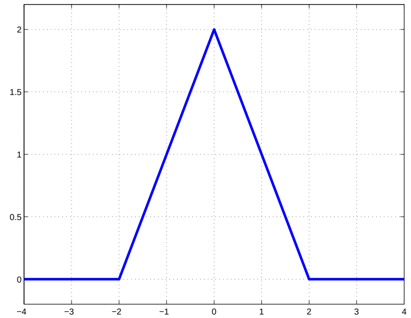
Für die Autokorrelation $f * f$ des Einheitsimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \le t \le 1; \\ 0 & \text{für } |t| > 1; \end{cases}$$



bekommt man die Hutfunktion

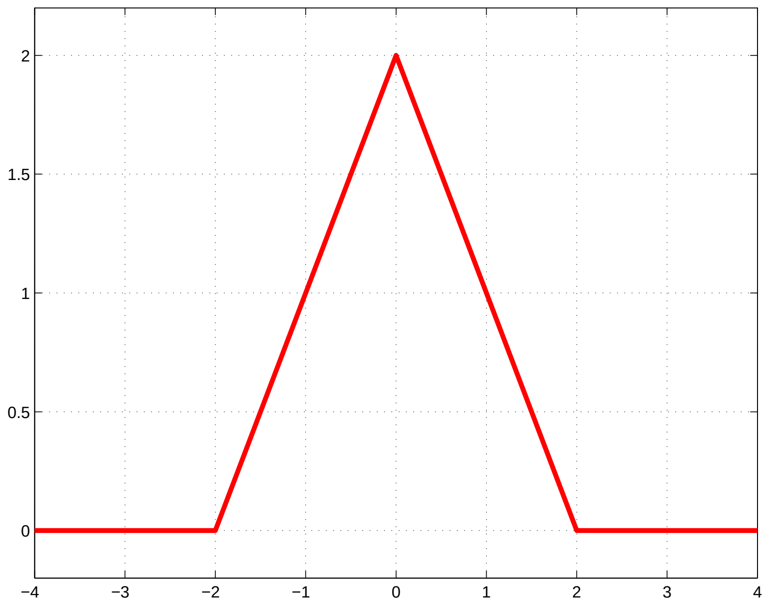
$$g(t) = \begin{cases} 2 - |t| & \text{für } -2 \le t \le 2; \\ 0 & \text{für } |t| > 2; \end{cases}$$



und somit gilt nach dem Faltungssatz

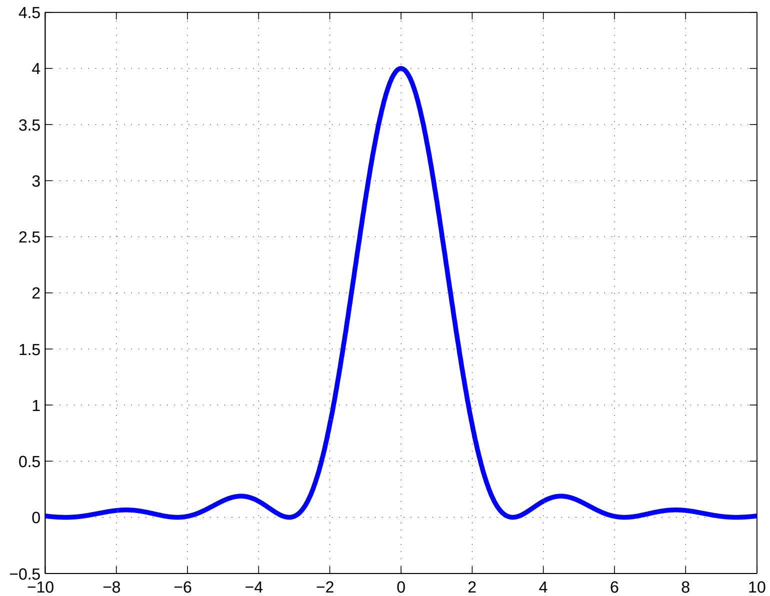
$$F[g](\omega) = F[f * f](\omega) = (F[f](\omega))^2 = 4\text{sinc}^2(\omega).$$

Die Hutfunktion und ihre Fourier-Transformation.



Hutfunktion

$f(t)$.



Fourier-Transformation

$\hat{f}(\omega) = 4\text{sinc}^2(\omega)$.

Differentiation der Fourier-Transformation.

Satz: *Ist* f *eine stückweise* C^1*-Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen* $t_1, \ldots, t_m$, *und sind* f *und* f' *absolut integrierbar, d.h.*

$$\|f\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \qquad \textit{und} \qquad \|f'\|_{L_1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt < \infty$$

so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega) - \sum_{k=1}^{m} \left(f(t_k^+) - f(t_k^-)\right) e^{-i\omega t_k}$$

Beweis: O.E. für eine Unstetigkeitsstelle, t_1, gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\, dt &= \int_{-\infty}^{t_1} f'(t)e^{-i\omega t}\, dt + \int_{t_1}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{t_1} + \left[f(t)e^{-i\omega t}\right]_{t_1}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \left(f(t_1^-) - f(t_1^+)\right) e^{-i\omega t_1} + i\omega\mathcal{F}[f](\omega)
\end{aligned}$$

wobei $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ verwendet wurde (wegen $f \in L_1(\mathbb{R})$). ■