Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. H. J. Oberle, Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7

Aufgabe 25: Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben ,,w" (für wahr) oder ,,f" für falsch ein. Für jede vollständig richtig bewertete Teilaufgabe a) - e) erhalten Sie zwei Punkte. Sofern eine Teilaufgabe nicht vollständig richtig bewertet wurde (eine oder mehrere falsche Bewertungen bzw. keine Bewertung) erhalten Sie Null Punkte für diese Teilaufgabe.

a) Gegeben sei die Funktion $f(z) = \dfrac{z^2+8z+15}{(z^2-25)(z^2+4)}$.

- ☐ f besitzt die einfachen Pole -5, 5, -2i und 2i.
- ☐ Es gilt $Res\, f(2i) + Res f(-2i) = -8/29$.
- ☐ Es gilt $Res\, f(5) + Res f(-5) = -8/29$.
- ☐ Es gilt $\displaystyle\int_{|z|=8} f(z)dz = -32\pi i/29$.

b) Die komplexe Partialbruchzerlegung von $f(z) = \dfrac{z^2+8z+15}{(z^2-25)(z^2+4)}$ lautet

- ☐ $f(z) = \dfrac{8}{29(z-5)} + \dfrac{Res\, f(2i)}{z-2i} + \dfrac{Res\, f(-2i)}{z+2i}$
- ☐ $f(z) = \dfrac{-8}{29(z+5)} + \dfrac{8}{29(z-5)} + \dfrac{Res\, f(2i)}{z-2i} + \dfrac{Res\, f(-2i)}{z+2i}$
- ☐ $f(z) = \dfrac{8}{29(z-5)} + \dfrac{Res(-5)}{(z+5)} + \dfrac{Res\, f(2i)}{z-2i} + \dfrac{Res\, f(-2i)}{z+2i}$
- ☐ $f(z) = \dfrac{Res(5)}{(z-5)} + \dfrac{11i-16}{116(z-2i)} + \dfrac{Res\, f(-2i)}{z+2i}$

c) Die Funktion $g(z) = \dfrac{2z^4+3z^3+3}{z^3+z^4}$

- ☐ hat in $z_0 = 0$ einen Pol dritter Ordnung.
- ☐ hat in $z = -1$ eine hebbare Singularität.
- ☐ Es gilt $Res\, g(0) = 3$.

☐ Es gilt $Res\, g(-1) = -2$.

d) Die Funktion $q(z) = \dfrac{z^3+3}{z^3+z^4}$

☐ hat in $z_0 = 0$ einen Pol dritter Ordnung.

☐ Es gilt $q(z) = \dfrac{Res\, q(0)}{z^3} + \dfrac{Res\, q(-1)}{z+1}$.

☐ Es gilt $q(z) = 3\left(\dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z^2}\right) + \dfrac{Res\, q(0)}{z} - \dfrac{2}{z+1}$.

☐ Es gilt $q(z) = h_0(z) - \dfrac{1}{z+1}$, wobei $h_0(z)$ der Hauptteil von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ ist.

e) Gegeben sei die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$. Dann gilt wenn die angegebenen Kurven jeweils einmal positiv durchlaufen werden

☐ $\displaystyle\int_{|z|=\pi/2} f(z)dz = -\pi i/3$.

☐ $\displaystyle\int_{|z|=\pi} f(z)dz = -\pi i/3$.

☐ $\displaystyle\int_{|z|=2\pi} f(z)dz = 0$.

☐ $\displaystyle\int_{|z|=\pi/4} f(z)dz = 0$.

Aufgabe 26: Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuenkalküls.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+16}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3}{x^8+16}\, dx$ Nachdenken!!

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+2x}{x^{\frac{4}{3}}(x^3+2x^2+4x+8)}\, dx$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\cos(\omega x)}{(x^2-2x+2)(x^2+1)}\, dx$ $\omega \in \mathbb{R}^+$ fest.

Aufgabe 27: (Klausur Okt. 2005 Oberle/Kiani)

a) Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(z) \;=\; \frac{\sin(z)}{z\,(z^2+1)}\,.$$

(i) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

(ii) Berechnen Sie die Residuen in allen isolierten Singularitäten von f.

(iii) Berechnen Sie folgende Integrale, wobei die angegebenen Kreise einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden sollen.

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz\,, \qquad\qquad \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} f(z)dz\,.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx\,.$$

Geben Sie das Ergebnis auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 28: (Klausur Feb. 2006 Oberle/Kiani)

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(z) \;=\; \frac{2z^2-3iz+2}{(4z^2+1)\,(z^2+4)}\,.$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

b) Berechnen Sie die Residuen in allen isolierten Singularitäten von f.

c) Geben Sie die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\tilde{f}(z) \;=\; \frac{1}{(2z-i)(z+2i)}$$

an.

d) Berechnen Sie diejenige Laurent–Reihe von $\tilde{f}$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, die für $z^* = 1$ gegen $f(1)$ konvergiert.

Abgabetermin: 03.07.07 bzw. 05.07.07

Das war Mathe IV !!!! Viel Erfolg in den Klausuren und bei Ihrem weiteren Studium!

gez. Prof. Dr. H. J. Oberle, Dr. H. P. Kiani, Dipl. Math. M. Kunkel