Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Partielle Differentialgleichungen

Thomas Schmidt
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Vorlesung an der Technischen Universität Hamburg
Sommersemester 2024

Inhaltsverzeichnis (vorläufig)

Kapitel 1: Grundlagen, Terminologie, Beispiele

Das Studium partieller Differentialgleichungen führt mathematisch sehr weit und umfasst etliche gänzlich verschiedene Theorien und Aspekte.

Diese Vorlesung kann daher nur eine sehr grundlegende Einführung in die generelle Thematik geben und zielt schwerpunktmäßig auf die Behandlung einiger spezieller Gleichungen mit Modellcharakter ab.

1.1 Terminologie bei PDG

Terminologie (für partielle Ableitungen)

Für Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^q$ *von* n *Variablen* $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *mit beliebigen* $n, q \in \mathbb{N}$ *vereinbare Notation für*

- *alle ersten partiellen Ableitungen* (*Jacobi-Matrix*; *Gradient, falls* $q = 1$):

$$\mathrm{D}u := \mathrm{J}u := \left(\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{i=1,2,\ldots,n} = (\partial_i u)_{i=1,2,\ldots,n}\,,$$

- *alle zweiten partiellen Ableitungen* (*Hesse-Matrix, falls* $q = 1$):

$$\mathrm{D}^2 u := \left(\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} = (\partial_i \partial_j u)_{i,j=1,\ldots,n}\,,$$

- *alle k-ten partiellen Ableitungen mit beliebigem* $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{D}^k u := \left(\tfrac{\partial^k u}{\partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}\right)_{i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,n} = (\partial_{i_k} \ldots \partial_{i_1} u)_{i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,n}\,.$$

Allgemeine Form partieller Differentialgleichungen

Definition (partielle Differentialgleichung)

Eine partielle Differentialgleichung (kurz PDG oder partielle DGL) ist eine Gleichung mit partiellen Ableitungen bis Ordnung $m \geq 1$ der Form

$$\boxed{F(x, u(x), \mathrm{D}u(x), \mathrm{D}^2u(x), \ldots, \mathrm{D}^m u(x)) = 0 \quad \textit{für alle } x \in \Omega}$$

oder in funktionaler Kurznotation

$$\boxed{F(\,\cdot\,, u, \mathrm{D}u, \mathrm{D}^2u, \ldots, \mathrm{D}^m u) \equiv 0 \quad \textit{auf } \Omega}$$

für eine gesuchte Funktion $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^q$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Erfüllt u die Gleichung, so heißt u eine Lösung der PDG auf Ω.

Der entscheidende Unterschied zu GDG ist, dass $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nicht nur eine, sondern mehrere (nämlich $n \geq 2$) Variablen enthält.

Bezeichnungen bei partiellen Differentialgleichungen

Bezeichnungen bei PDG $F(\,\cdot\,, u, \mathrm{D}u, \mathrm{D}^2u, \ldots, \mathrm{D}^m u) \equiv 0$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

- m: Ordnung der PDG (wenn $\mathrm{D}^m u$ wirklich vorkommt),
- n: Anzahl Variablen (wie gesagt $n \geq 2$),
- q: Anzahl (Komponenten-)Funktionen (von $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^q$),
- N: Anzahl (Komponenten-)Gleichungen (von PDG mit „$\equiv$" in $\mathbb{R}^N$),
- F: gegebene Strukturfunktion der PDG (von geeignetem Definitionsbereich nach $\mathbb{R}^N$).

Tatsächlich geht es in dieser Vorlesung vor allem um $N = q = 1$ (skalare PDG für eine Funktion) mit Ordnung $m \in \{1, 2\}$. Auch $N = q \geq 2$ (PDG-System für mehrere Funktionen) ist sinnvoll, führt aber eher zu weit.

Randbedingungen

I.A. sind nur Randwertprobleme (RWPe) aus PDG und zusätzlichen Randbedingungen (RBen) auf $\partial\Omega$ eindeutig lösbar. Als grobe Faustregel erfordert ein PDG-System der Ordnung m für $N = q$ Funktionen $\frac{mq}{2}$ RBen (wobei „halbe RBen“ nur einen Randteil betreffen, oft ähnlich zu ABen bei GDG).

Verbreitet sind (Varianten von) Dirichlet-RBen

$$u(x) = g(x) \qquad \text{für } x \in \partial\Omega$$

mit gegebener Funktion $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^q$ und Neumann-RBen

$$\partial_\nu u(x) = \psi(x) \qquad \text{für } x \in \partial\Omega$$

mit äußeren Einheitsnormalenvektorfeld $\nu\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ an $\partial\Omega$, Normalenableitung $\partial_\nu u(x) := \mathrm{J}u(x)\nu(x)$ und gegebener Funktion $\psi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^q$ sowie Anfangsbedingungen (ABen)/Cauchy-Bedingungen (dazu später).

Klassifikation von PDG

Wie GDG klassifiziert man auch PDG der Ordnung m wie folgt:

- Autonome PDG haben die Form $F_0(u, \mathrm{D}u, \mathrm{D}^2 u, \ldots, \mathrm{D}^m u) \equiv 0$.
- Lineare PDG hängen affin (linear) von u, $\mathrm{D}u$, $\mathrm{D}^2 u$, $\ldots \mathrm{D}^m u$ ab. Die i.A. x-abhängigen Vorfaktoren vor u und seinen Ableitungen nennt man dann Koeffizienten, von u und seinen Ableitungen unabhängige Terme werden oft auf die rechte Seite gebracht und heißen Inhomogenität.

Bei nichtlinearen PDG unterscheidet man weiterhin:

- Semilineare PDG hängen affin (linear) von $\mathrm{D}^m u$ ab und weisen nur von x abhängige Koeffizienten vor den m-ten Ableitungen auf.
- Quasilineare PDG hängen affin (linear) von $\mathrm{D}^m u$ ab (allgemein mit $(\,\cdot\,, u, \mathrm{D}u, \ldots, \mathrm{D}^{m-1} u)$-abhängigen Koeffizienten vor den m-ten Ableitungen).
- Voll nichtlineare PDG sind nicht quasilinear.

Grundlegende Typen von PDG

Für diese Vorlesung grundlegende Typen skalarer PDG (für $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$):

- Lineare PDG erster Ordnung (mit Koeffizienten $a_i, b\colon \Omega \to \mathbb{R}$):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + b(x)u(x) = f(x)\,.$$

- Lineare PDG zweiter Ordnung (mit Koeffizienten $a_{i,j}, b_i, c\colon \Omega \to \mathbb{R}$):

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x) = f(x)\,.$$

- Semilineare PDG erster Ordnung (mit $a_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $b\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x, u(x))\,.$$

- Quasilineare PDG erster Ordnung (mit $a_i, b\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x, u(x))\,.$$

1.2 Vermischte Beispiele für PDG

Im Folgenden werden eine Reihe Beispiele aus dem „Zoo“ grundlegender PDG angegeben sowie passende RBen und Interpretationen kurz diskutiert. Die gänzlich verschiedenen Interpretationen und Anwendungskontexte unterstreichen dabei die weite Bedeutung von PDG.

Wird nichts anderes gesagt, handelt es sich bei den Beispielen jeweils um eine skalare Gleichung für eine einzelne Funktion.

Transportgleichung

Lineare Transportgleichung für $u\colon [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) = 0 \qquad \text{für } (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n$$

mit gegebenem $T > 0$ und $a\colon (0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ („$\cdot$“ ist Skalarprodukt).

Typisches Feature: Auftreten von Zeitvariable $t \in [0,T)$ und Raumvariablen $x \in \mathbb{R}^n$. Oft wird dann nur ∇u notiert, behält aber die Bedeutung $\nabla_x u$.

Klassifikation: Ordnung 1, linear, homogen.

Sinnvoll mit Anfangsbedingung („halbe RB“; $u_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben):

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Interpretation: Lösungen u modellieren die Dichte von Masse oder Ladung, die entlang des Felds a transportiert wird. Speziell entspricht konstantes a einer gleichmäßigen Drift $u(t,x) = u_0(x{-}ta)$ mit Geschwindigkeit $a \in \mathbb{R}^n$.

Cauchy-Riemann-Gleichungen

Cauchy-Riemann-Gleichungen für $f, g \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ in Variablen (x, y):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} &\equiv 0\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Klassifikation: System von 2 Gleichungen, Ordnung 1, linear, homogen.

Bedeutung: Charakterisiert bei Identifikation $\mathbb{C} \ni x+\mathbf{i}y \mathrel{\widehat{=}} (x, y) \in \mathbb{R}^2$ die holomorphen (d.h. komplex differenzierbaren) Funktionen $f+\mathbf{i}g \colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf $\Omega \subset \mathbb{C}$. Mehr in Vorlesung „Komplexe Funktionen“!

Sinnvoll mit Dirichlet-RB für entweder f oder g auf $\partial\Omega$
(dann allerdings noch additive Konstante bei anderer Funktion frei).

Laplace-Gleichung und Poisson-Gleichung

Laplace-Gleichung bzw. Poisson- oder Potentialgleichung für $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$:

$$\Delta u(x) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta u(x) = f(x) \qquad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

mit gegebenem $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und mit dem wichtigen Laplace-Operator

$$\Delta u(x) := \operatorname{div}(\nabla u)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \operatorname{Spur}(\mathrm{D}^2 u(x))\,.$$

Lösungen der Laplace-Gleichung nennt man auch harmonische Funktionen.

Klassifikation: Ordnung 2, linear, homogen bzw. inhomogen.

Sinnvoll mit entweder Dirichlet-RB oder Neumann-RB für u auf $\partial\Omega$.

Bedeutung/Interpretation: Charakterisiert Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen. Lösungen modellieren das elektrische Potential bei Ladungsdichte f/ε_0 (mit physikalischer Konstante $\varepsilon_0 > 0$).

Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung

Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung für $u\colon [0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0 \qquad \text{für } (t,x) \in \Omega_T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,,$$

wieder mit Zeit- und Raum-Variablen und mit Abkürzung $S_T := (0,T) \times S$.

Klassifikation: Ordnung 2, linear, homogen (aber inhomogen auch relevant).

Sinnvoll z.B. mit AB und Dirichlet-RB ($\rightsquigarrow$ 1 RB auf „parabolischem Rand“)

$$u(0,x) = u_0(x) \text{ für } x \in \Omega \,, \qquad u(t,x) = g(t,x) \text{ für } (t,x) \in (\partial\Omega)_T$$

für gegebene $u_0\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $g\colon (\partial\Omega)_T \to \mathbb{R}$.

Interpretation: Lösungen u modellieren die Massendichte/Konzentration bei Diffusionsprozessen oder die Temperatur bei der Wärmeausbreitung.

Im stationären Fall $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ erhalte Laplace-Gleichung zurück.

Navier-Stokes-Gleichungen

Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen für $(\vec{v}, p)\colon [0,T) \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{c} \rho \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \mu \, \Delta_x \vec{v} + \rho \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} = -\nabla_x p \,, \\ \operatorname{div}_x \vec{v} = 0 \end{array} \right\} \text{ auf } \Omega_T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

mit Konstanten $\rho, \mu > 0$.

Klassifikation: System von $n{+}1$ Gleichungen, Ordnung 2, semilinear.

Sinnvolle RB wie bei Diffusionsgleichung (auch No-Slip-RBen genannt).

Interpretation: Lösungen $(\vec{v}, p)$ modellieren Geschwindigkeit und Druck bei Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Dichte ρ und konstanter Viskosität μ. Absolut grundlegend in Fluidmechanik!

Speziell für $\mu = 0$ erhalte die Euler-Gleichungen der Fluidmechanik und im Fall $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \equiv 0$ die stationären Navier-Stokes- bzw. Euler-Gleichungen.

Wellengleichung

Wellengleichung für $u\colon \mathbb{R}\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)-\Delta_x u(t,x)=0 \qquad \text{für } (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

Klassifikation: Ordnung 2, linear, homogen (aber inhomogen auch relevant).

Sinnvoll z.B. mit 2 ABen und Dirichlet-RB (dennoch eher 1 RB insgesamt)

$$u(0,x)=u_0(x) \text{ für } x\in\Omega\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=v_0(x) \text{ für } x\in\Omega\,,$$
$$u(t,x)=g(t,x) \text{ für } (t,x)\in\mathbb{R}\times\partial\Omega$$

für gegebene $u_0,v_0\colon\Omega\to\mathbb{R}$ und $g\colon\mathbb{R}\times\partial\Omega\to\mathbb{R}$.

Interpretation: Lösungen u modellieren Auslenkungen bei der Ausbreitung von Wellen und/oder bei Schwingungen.

Im stationären Fall $\frac{\partial u}{\partial t}\equiv 0$ erhalte wieder Laplace-Gleichung zurück.

Schrödinger-Gleichung

Schrödinger-Gleichung für $\psi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$:

$$\mathbf{i}\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar}{2m} \Delta_x \psi - V\psi \equiv 0 \qquad \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

mit gegebenem $V\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und Konstanten $\hbar, m > 0$.

Klassifikation: Skalar über $\mathbb{C}$/System über $\mathbb{R}$, Ordnung 2, linear, homogen.

Sinnvoll mit AB ($\psi_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gegeben):

$$\psi(0, \cdot\,) = \psi_0 \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n\,.$$

Interpretation: Lösungen ψ sind Wellenfunktionen (quantenmechanische Zustände) eines punktförmigen Teilchens der Masse m im Potential V (mit reduzierter Planck-Konstante $\hbar$). Grundlegend für die Quantenmechanik!

Produkt-Exponentialansatz führt u.U. auf Eigenwertproblem für Δ_x.

Maxwell-Gleichungen

Maxwell-Gleichungen im Vakuum für $(\vec{E},\vec{B})\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 \operatorname{div}_x \vec{E}(t,x) &= \rho(t,x)\,,\\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t,x) + \operatorname{rot}_x \vec{E}(t,x) &= 0\,,\\ \operatorname{div}_x \vec{B}(t,x) &= 0\,,\\ \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t,x) - \operatorname{rot}_x \vec{B}(t,x) &= -\mu_0\,\vec{\jmath}\,(t,x) \end{aligned}\right\} \text{ für } (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$$

mit gegebenen $(\rho,\vec{\jmath}\,)\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ und Konstanten $\varepsilon_0,\mu_0>0$.

Klassifikation: 8 Komponenten-Gleichungen für 6 Komponenten-Funktionen (okay, weil rot stark entartet; $\operatorname{rot}\circ\nabla\equiv 0$, $\operatorname{div}\circ\operatorname{rot}\equiv 0$), linear, i.A. inhomogen.

Sinnvoll mit ABen $\vec{E}(0,x)=\vec{E}_0(x)$ und $\vec{B}(0,x)=\vec{B}_0(x)$ für gegebene $(\vec{E}_0,\vec{B}_0)\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ mit $\varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E}_0=\rho(0,\,\cdot\,)$ und $\operatorname{div}\vec{B}_0\equiv 0$ auf $\mathbb{R}^3$.

Interpretation: Diese vier Grundgleichungen der Elektrodynamik bestimmen die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ bei vorgegebener elektrischer Ladungsdichte ρ und elektrischer Stromdichte $\vec{\jmath}$.

Minimalflächengleichung

Minimalflächengleichung für $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \qquad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Klassifikation: Ordnung 2, quasilinear.

Sinnvoll mit Dirichlet-RB für u auf $\partial\Omega$ oder gewissen freien RBen.

Interpretation: Graphen von Lösungen u sind sogenannte Minimalflächen, die in jedem ihrer Punkte mittlere Krümmung Null haben und in geometrischer Analysis und Differentialgeometrie von Interesse sind.

Monge-Ampère-Gleichung

Monge-Ampère-Gleichung für $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$:

$$\det\big(\mathrm{D}^2 u(x)\big) = f(x) \qquad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

mit gegebenem (oftmals überall positivem) $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Klassifikation: Ordnung 2, voll nichtlinear.

Sinnvoll mit Dirichlet-RB oder Neumann-RB oder gewisser natürlicher RB.

Anwendungen: Lösungen u hängen mit dem Optimaltransport von Masseverteilungen und mit Flächen vorgeschriebener Gauß-Krümmung zusammen.

Schwerpunkte der Vorlesung

Schwerpunktmäßig werden als Modellfälle mit besonders exemplarischen Charakter unter den vorausgehenden Beispielen nun

- die Transportgleichung und allgemeinere PDG erster Ordnung,
- die Laplace- und Poisson-Gleichung (inklusive Eigenwertprobleme),
- die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung
- und die Wellengleichung

genauer behandelt.

Kapitel 2: PDG erster Ordnung

PDG erster Ordnung treten in verschiedenen Anwendungskontexten auf, beschreiben aber meist eine zeitliche Entwicklung ausgehend von einer AB. Im Allgemeinen können PDG erster Ordnung eher noch explizit gelöst oder analysiert werden als PDG zweiter und höherer Ordnung.

In diesem Kapitel werden nun zunächst Facetten eines zentralen Anwendungskontexts diskutiert, bevor dann eine recht allgemeine Lösungstheorie und verschiedene Modellfälle angegangen werden.

2.1 Die Kontinuitätsgleichung (und ihr Hintergrund)

Nutze hier stets Zeit-/Raumvariablen (t,x) sowie Kurznotationen $u_t := \frac{\partial u}{\partial t}$ und $\operatorname{div}(\dots) := \operatorname{div}_x(\dots)$. Die Kontinuitätsgleichung ist die lineare PDG

$$\boxed{u_t + \operatorname{div}(u\vec{v}) \equiv 0} \qquad \text{auf offenem } U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

für eine gesuchte Funktion $u \colon U \to \mathbb{R}$ und ein gegebenes oder von u abhängiges Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} \colon U \to \mathbb{R}^n$ (beide in Variablen $(t,x) \in U$).

Interpretation: Ist u Dichte einer gemäß $\vec{v}$ bewegten Größe (oft der Masse), so ist zur Zeit t und im Punkt x die zeitliche Änderungsrate $u_t(t,x)$ gleich der räumlichen Zu- bzw. Abstromdichte $-\operatorname{div}(u\vec{v})(t,x)$ $\big(\operatorname{div}(u\vec{v}){>}0 \rightsquigarrow$ Quellen-/Abstromdichte; $\operatorname{div}(u\vec{v}){<}0 \rightsquigarrow$ Senken-/Zustromdichte$\big)$.

Im 1d-Fall $n = 1$, der auch schon von Interesse ist, erhalte einfach

$$u_t + (uv)_x \equiv 0 \qquad \text{auf } U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung

Zur Unterfütterung der Interpretation sei $t \mapsto \Phi(t,x)$ die Trajektorie eines Teilchens, das zur Zeit $t = 0$ in $x \in U_0$ startet. (Mathematisch betrachte $\Phi \in \mathrm{C}^2(I \times U_0, \mathbb{R}^n)$, $\Phi(0,x) = x$ für $x \in U_0$, mit offenen $0 \in I \subset \mathbb{R}$, $U_0 \subset \mathbb{R}^n$.) Erhalte das mitbewegte Gebiet $U := \{(t, \Phi(t,x)) : t \in I\,,\ x \in U_0\}$ und das zu Φ gehörige Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ auf U mit

$$\vec{v}(t, \Phi(t,x)) = \partial_t \Phi(t,x) \qquad \text{für } (t,x) \in I \times U_0\,.$$

Satz (Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung)

Ist alles wie oben und $x \mapsto \Phi(t,x)$ für jedes $t \in I$ ein Diffeomorphismus, so sind für $u \in \mathrm{C}^1(U)$ **äquivalent:**

(1) *u löst die Kontinuitätsgleichung $u_t + \operatorname{div}(u\vec{v}) \equiv 0$ auf U.*

(2) *Massenerhaltung in mitbewegten Gebieten: Es gilt*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Phi(t,A_0)} u(t,x)\,\mathrm{d}x = 0$$

für jede kompakte und messbare Teilmenge $A_0 \subset U_0$ und jedes $t \in I$.

Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung (Fortsetzung)

Ergänzende Anmerkungen:

- Im Satz und im Folgenden sind kompakte Mengen abgeschlossen und beschränkt sowie messbare Mengen (Jordan-)messbar im Sinn der Analysis III.
- Die Voraussetzungen des Satzes sind für Trajektorien eines GDG-Systems in vielen (guten) Fällen erfüllt. Ihr Nachweis braucht aber mehr GDG-Theorie.

Beweis des Satzes zu Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung:
Der Reynoldssche Transportsatz für das Ableiten auf dem bewegten Gebiet (siehe nächste Folie) gibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Phi(t,A_0)} u(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Phi(t,A_0)} \big[u_t(t,x) + \operatorname{div}(u\vec{v})(t,x)\big]\,\mathrm{d}x$$

für A_0 wie in (2) und $t \in I$. Deshalb ist (1) $\Longrightarrow$ (2) direkt klar. Gelte nun (2). Weil jede kompakte und messbare Teilmenge $B_t \subset \Phi(t,U_0)$ die Form $B_t = \Phi(t,A_0)$ hat, folgt $\int_{B_t} \big[\,\dots\,\big]\,\mathrm{d}x = 0$ für <u>jedes</u> solche B_t. Man schließt auf $\big[\,\dots\,\big] = 0$ für alle $x \in \Phi(t,U_0)$ und insgesamt für alle $(t,x) \in U$. $\square$

Der Reynoldssche Transportsatz

Satz (Reynoldsscher Transportsatz)

Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Phi(t,A_0)} u(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Phi(t,A_0)} \big[u_t(t,x) + \operatorname{div}(u\vec{v})(t,x)\big]\,\mathrm{d}x$$

für jede kompakte und messbare Teilmenge $A_0 \subset U_0$ und jedes $t \in I$.

Beweis: Die Transformationsformel der Analysis III besagt $(\mathrm{D}\Phi := \mathrm{D}_x\Phi)$

$$\int_{\Phi(t,A_0)} u(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_{A_0} u(t,\Phi(t,x))\ |\det(\mathrm{D}\Phi(t,x))|\,\mathrm{d}x\,.$$

Ableiten nach den Auftreten von t rechts — nach dem dritten mit dem nächsten Lemma — ergibt dann (mit Kurznotation und $\partial_t\Phi = \vec{v}(\,\cdot\,,\Phi)$)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Phi(t,A_0)} u\,\mathrm{d}x &= \int_{A_0}\big[u_t + \nabla u\cdot\vec{v} + (u\operatorname{div}\vec{v})\big](\,\cdot\,,\Phi)\ |\det(\mathrm{D}\Phi)|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{A_0}\big[u_t + \operatorname{div}(u\vec{v})\big](\,\cdot\,,\Phi)\ |\det(\mathrm{D}\Phi)|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\Phi(t,A_0)}\big[u_t + \operatorname{div}(u\vec{v})\big]\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

□

Lemma für den Beweis des Reynoldsschen Transportsatzes

Lemma (Euler-Identität der Fluidmechanik/Ableitung der Jacobischen)

Mit Voraussetzungen und Notation der vorigen Sätze gilt

$$\partial_t|\det(\mathrm{D}\Phi)| = (\operatorname{div}\vec{v})(\,\cdot\,,\Phi)\,|\det(\mathrm{D}\Phi)| \qquad \textit{auf } I\times U_0\,.$$

Beweis: Durch Fallunterscheidung nach Vorzeichen von $\det(\mathrm{D}\Phi)$ reduziere auf Nachweis der Behauptung ohne Beträge. Aus Laplace-Entwicklung $\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik}(\operatorname{adj} A)_{ki}$ für $A = (a_{ij})$ bekomme $\frac{\partial(\det A)}{\partial a_{ij}} = (\operatorname{adj} A)_{ji}$. Damit berechne erst

$$\partial_t(\det(\mathrm{D}\Phi)) = \sum_{i,j=1}^n (\operatorname{adj}(\mathrm{D}\Phi))_{ji}\partial_t(\mathrm{D}\Phi)_{ij} = \mathrm{Spur}(\operatorname{adj}(\mathrm{D}\Phi)\mathrm{D}\partial_t\Phi)$$

und weiter mit $\operatorname{adj} A = A^{-1}\det A$ und $\partial_t\Phi = \vec{v}(\,\cdot\,,\Phi)$ dann

$$\begin{aligned}\ldots &= \mathrm{Spur}[(\mathrm{D}\Phi)^{-1}\mathrm{D}(\vec{v}(\,\cdot\,,\Phi))]\det(\mathrm{D}\Phi)\\ &= \mathrm{Spur}[(\mathrm{D}\Phi)^{-1}\mathrm{D}\vec{v}(\,\cdot\,,\Phi)\mathrm{D}\Phi]\det(\mathrm{D}\Phi)\\ &= \mathrm{Spur}[\mathrm{D}\vec{v}(\,\cdot\,,\Phi)]\det(\mathrm{D}\Phi) = (\operatorname{div}\vec{v})(\,\cdot\,,\Phi)\det(\mathrm{D}\Phi)\,.\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Lemmas (und der vorigen Sätze) komplett. □

Zu Interpretation und Auftreten der Kontinuitätsgleichung

Abschließend halten wir zu Interpretation und Auftreten der betrachteten Kontinuitätsgleichung $\boxed{u_t + \operatorname{div}(u\vec{v}) \equiv 0}$ fest:

- Sie modelliert Massen-/Ladungserhaltung in physikalischen Prozessen. (Z.B. ist Ladungserhaltung $\rho_t + \operatorname{div}\vec{\jmath} \equiv 0$ Teil der Maxwell-Gleichungen, denn aus diesen folgt $\rho_t = \varepsilon_0(\operatorname{div}\vec{E})_t = \varepsilon_0\operatorname{div}(\vec{E}_t) = -\operatorname{div}\vec{\jmath}$.)
- Sie reduziert sich bei konstanter Dichte $u \equiv \text{const}$ zu $\operatorname{div}\vec{v} \equiv 0$.

  (Tritt z.B. als Inkompressibilität in den Navier-Stokes-/Euler-Gleichungen auf.)
- Sie ergibt bei konstantem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} \equiv a \in \mathbb{R}^n$ die lineare Transportgleichung $u_t + a \cdot \nabla u \equiv 0$.
- Sie ergibt bei Zusammenhang $u\vec{v} = -C\,\nabla u$ mit Konstante $C > 0$ die Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung $u_t - C\Delta u \equiv 0$.
  (Hierbei hat $u\vec{v} = -C\,\nabla u$ für Konzentration bzw. Temperatur u Interpretation als Ficksches Gesetz der Diffusion bzw. Fouriersches Gesetz der Wärmeleitung. Im stationären Fall erhalte ähnlich für elektrische Spannung u aus $\operatorname{div}\vec{\jmath} \equiv 0$ und Ohmschen Gesetz $\vec{\jmath} = -C\nabla u$ der Leitfähigkeit die Laplace-Gleichung.)

2.2 Die Methode der Charakteristiken

Die Methode der Charakteristiken reduziert skalare partielle DGL erster Ordnung auf zugrundeliegende gewöhnliche DGL. Hierdurch erhält man eine prinzipielle Chance, mit Methoden aus DGL I explizit zu lösen.

Einleitendes Beispiel

Bei der linearen Beispiel-PDG (Ordnung 1, skalar, homogen)

$$\boxed{\underbrace{2\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}_{=(2,-1)\cdot\nabla u(x,y)} - \,4x\,u(x,y) = 0} \qquad \text{für } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

spielt nur die Ableitung von u in Richtung des Vektors $(2,-1)$ eine Rolle. Deshalb betrachte (parametrisierte) Geraden

$$\gamma_{(x_0,y_0)}(t) := (x_0,y_0) + t(2,-1) = (x_0{+}2t, y_0{-}t) \qquad \text{für } t\in\mathbb{R}$$

mit beliebigem Aufpunkt $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ und Richtungsvektor $(2,-1)\in\mathbb{R}^2$. Für $\nu_{(x_0,y_0)}(t) := u(x_0{+}2t, y_0{-}t)$ (d.h. u entlang der Geraden) gilt

$$\big(\nu_{(x_0,y_0)}\big)'(t) = 2\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_0{+}2t, y_0{-}t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0{+}2t, y_0{-}t)\,.$$

Deshalb ergibt die partielle DGL für u folgende gewöhnliche DGL für ν:

$$\boxed{\nu'(t) - 4(x_0{+}2t)\,\nu(t) = 0} \qquad \text{für } t\in\mathbb{R}\,.$$

Einleitendes Beispiel (Fortsetzung)

Tritt zur PDG eine sogenannte Cauchy-Bedingung (z.B. AB), die $u(x_0, y_0)$ für manche $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vorgibt, so erhalte das AWP

$$\nu'(t) - 4(x_0+2t)\,\nu(t) = 0 \qquad \text{mit AB } \nu(0) = u(x_0, y_0)\,.$$

DGL I (Lösungsformel!) gibt als Lösung des AWP der gewöhnlichen DGL:

$$u(x_0+2t, y_0-t) = \nu_{(x_0,y_0)}(t) = u(x_0, y_0)\,\mathrm{e}^{(x_0+2t)^2-x_0^2}\,.$$

Liegt etwa eine AB der einfachen Form

$$u(x_0, 0) = u_0(x_0) \qquad \text{für } x_0 \in \mathbb{R}$$

vor, so nutze das vorige Ergebnis für $y_0 = 0$ und bekomme mit $x = x_0+2t$, $y = y_0-t = -t$ als Lösung des AWP der partiellen DGL:

$$u(x, y) = u_0(x+2y)\,\mathrm{e}^{x^2-(x+2y)^2} = u_0(x+2y)\,\mathrm{e}^{-4y^2-4xy}\,.$$

Flusslinien/charakteristische Kurven

Die allgemeine skalare lineare PDG der Ordnung 1 lautet

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)}_{=\,a(x)\cdot\nabla u(x)} + b(x)\,u(x) = f(x) \qquad \text{für } x \in \Omega$$

(über offenem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, mit $a \in \mathrm{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $b, f \in \mathrm{C}^0(\Omega)$).

Die Geraden im Beispiel ersetze durch Flusslinien/charakteristische Kurven γ_{x_0} des Felds a: Nach dem Satz von Picard-Lindelöf aus DGL I existiert für jedes $x_0 \in \Omega$ die eindeutige Lösung $\gamma_{x_0} \in \mathrm{C}^1(I_{x_0}, \Omega)$ des nichtlinearen AWPs

$$\text{aus GDG } \gamma'(t) = a(\gamma(t)) \text{ für } t \in I_{x_0} \qquad \text{mit AB } \gamma(0) = x_0$$

auf einem größten Existenzintervall I_{x_0} für eine Lösung mit Werten in Ω. Flusslinien berühren oder schneiden sich nie (aber $\gamma_{x_0}(t) = \gamma_{\gamma_{x_0}(s)}(t-s)$).

(Die Gesamtheit $\Phi(t, x_0) := \gamma_{x_0}(t)$ aller γ_{x_0} heißt übrigens der Fluss von a. Für diesen lauten die GDG $\partial_t \Phi(t, x_0) = a(\Phi(t, x_0))$ und die ABen $\Phi(0, x_0) = x_0$.)

Die Methode der Charakteristiken im linearen Fall

Prinzip (Methode der Charakteristiken für lineare PDG)

Für Ω, a, b, f, γ_{x_0}, I_{x_0} *wie zuvor und* $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ *sind* **äquivalent:**

(1) u *löst die lineare PDG* $a(x) \cdot \nabla u(x) + b(x)u(x) = f(x)$ *für* $x \in \Omega$.

(2) *Für jedes* $x_0 \in \Omega$ *löst* ν_{x_0} *mit* $\boxed{\nu_{x_0}(t) := u(\gamma_{x_0}(t))}$ *die lineare GDG*

$$\nu'(t) + b(\gamma_{x_0}(t))\,\nu(t) = f(\gamma_{x_0}(t)) \qquad \text{für } t \in I_{x_0}\,.$$

Dies bedeutet: Die PDG reduziert sich auf GDG entlang der Flusslinien.

Beweis: Aus $\nu_{x_0}(t) = u(\gamma_{x_0}(t))$ erhalte mit Kettenregel und Flusslinien-GDG allgemein (vgl. auch einleitendes Beispiel)

$$\nu_{x_0}'(t) = \gamma_{x_0}'(t) \cdot \nabla u(\gamma_{x_0}(t)) = a(\gamma_{x_0}(t)) \cdot \nabla u(\gamma_{x_0}(t))\,.$$

Damit ergibt die PDG an der Stelle $x = \gamma_{x_0}(t)$ die GDG, und umgekehrt ergeben die GDG die PDG, weil jedes $x \in \Omega$ die Form $x = \gamma_{x_0}(t)$ hat (tatsächlich $x = \gamma_x(0)$, aber auch spezielle x_0 wie auf der Folgefolie reichen). □

Cauchy-Bedingungen und rechnerisches Vorgehen

Die bei skalaren PDG der Ordnung 1 sinnvolle Cauchy-Bedingung lautet

$$u(x) = u_0(x) \qquad \text{für } x \in S\,.$$

Dabei gegeben: Kurve ($n{=}2$), Fläche ($n{=}3$), allgemein Hyperfläche $S \subset \Omega$, die jede Flusslinie genau einmal schneidet, und Funktion $u_0\colon S \to \mathbb{R}$ auf S.

Wird die PDG so ergänzt, so betrachte die GDG für γ und ν nur für $x_0 \in S$ und letztere entsprechend ergänzt um die AB

$$\nu(0) = u_0(x_0)\,.$$

Rechnerisches Vorgehen bei Methode der Charakteristiken:

- Löse AWP für Flusslinien γ_{x_0} mit $x_0 \in S$.
- Löse AWP für ν_{x_0} mit $x_0 \in S$, erhalte $u(\gamma_{x_0}(t)) {=} \nu_{x_0}(t)$ als Term in t, x_0.
- Löse $x = \gamma_{x_0}(t)$ nach (t, x_0) auf, erhalte Lösung $u(x)$ als Term in x.

Beispiel zur Methode der Charakteristiken (linearer Fall)

Betrachte als Beispiel das Cauchy-Problem zur linearen PDG

$$\begin{aligned} y\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - x\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + u(x,y) &= 0 \qquad && \text{für } (x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}\,, \\ u(x,0) &= \mathrm{e}^{-x^2} && \text{für } x \in (0,\infty)\,. \end{aligned}$$

Löse schrittweise (wobei $x_0 > 0$ und $\gamma_{x_0} = \gamma_{(x_0,0)}$, $\nu_{x_0} = \nu_{(x_0,0)}$ abgekürzt):

$\overset{\text{lese ab}}{\rightsquigarrow}$ AWP für Flusslinien: $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\gamma(t)$ mit AB $\gamma(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{löse}}{\rightsquigarrow}$ Flusslinien: $\gamma_{x_0}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t \\ -x_0 \sin t \end{pmatrix}$ für $|t| < \frac{\pi}{2}$

$\overset{\text{lese ab}}{\rightsquigarrow}$ AWP für ν_{x_0}: $\nu'(t) + \nu(t) = 0$ mit AB $\nu(0) = \mathrm{e}^{-x_0^2}$

$\overset{\text{löse}}{\rightsquigarrow}$ Lösung: $u(\gamma_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t) = \mathrm{e}^{-t-x_0^2}$

Löse noch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma_{x_0}(t)$ auf zu $t = -\arctan(y/x)$ und $x_0 = \sqrt{x^2+y^2}$.

$\overset{\text{setze ein}}{\rightsquigarrow}$ Lösung Cauchy-Problem zur PDG: $u(x,y) = \mathrm{e}^{\arctan(y/x)-x^2-y^2}$

Charakteristiken-Methode bei linearer Transportgleichung

Als weiteres Beispiel betrachte das AWP zur linearen Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_t(t,x) + a(t,x) \cdot \nabla u(t,x) &= 0 \qquad &&\text{für } (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= u_0(x) &&\text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Setze an wie folgt (wobei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma_{x_0} = \gamma_{(0,x_0)}$, $\nu_{x_0} = \nu_{(0,x_0)}$ abgekürzt):

$\overset{\text{lese ab}}{\rightsquigarrow}$ AWP für Flusslinien: $\gamma'(t) = (1, a(\gamma(t)))$ mit AB $\gamma(0) = (0, x_0)$

$\overset{\text{führt auf}}{\rightsquigarrow}$ $\gamma_{x_0}(t) = (t, \widetilde{\gamma}_{x_0}(t))$ und $\widetilde{\gamma}'(t) = a(t, \widetilde{\gamma}(t))$ mit AB $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$

$\overset{\text{lese ab}}{\rightsquigarrow}$ AWP für ν_{x_0}: $\nu'(t) = 0$ mit AB $\nu(0) = u_0(x_0)$

$\overset{\text{löse}}{\rightsquigarrow}$ $u(t, \widetilde{\gamma}_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t) = u_0(x_0)$, d.h. u konstant entlang Flusslinien

Nun ist noch $x = \widetilde{\gamma}_{x_0}(t)$ aufzulösen. Dies geht z.B. für konstantes a mit zugehörigen $\widetilde{\gamma}_{x_0}(t) = x_0 + ta$ und überführt dann $u(t, x_0 + ta) = u_0(x_0)$ in die schon aus Kapitel 1 bekannte Lösungsformel $u(t,x) = u_0(x - ta)$.

Die Methode der Charakteristiken im quasilinearen Fall

Im quasilinearen Fall funktioniert die Methode der Charakteristiken ähnlich:

Prinzip (Methode der Charakteristiken für quasilineare PDG)

Seien Ω offen in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $a \in \mathrm{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und $b \in \mathrm{C}^1(\Omega \times \mathbb{R})$. Dann sind für $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ **äquivalent:**

(1) *u löst die quasilineare PDG $a(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = b(x, u(x))$ für $x \in \Omega$.*

(2) *Für jedes $x_0 \in \Omega$ ist mit der Lösung $(\gamma_{x_0}, \nu_{x_0}) \in \mathrm{C}^1(I_{x_0}, \Omega \times \mathbb{R})$ (auf größten Existenzintervall I_{x_0}) des nichtlinearen GDG-Systems*

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= a(\gamma(t), \nu(t)) \\ \nu'(t) &= b(\gamma(t), \nu(t)) \end{aligned} \qquad \text{mit ABen} \qquad \begin{aligned} \gamma(0) &= x_0 \\ \nu(0) &= u(x_0) \end{aligned}$$

der Zusammenhang $\boxed{u(\gamma_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t)}$ für $t \in I_{x_0}$ erfüllt.

Im linearen Fall war speziell $a(x, y) = a_0(x)$ und $b(x, y) = -b_0(x)y + f(x)$. Dann betraf die erste GDG nur γ, nicht ν und konnte vorab gelöst werden, die zweite GDG war linear in ν. Diese Features hat man im quasilinearen Fall nicht mehr.

Rechnerisches Vorgehen und Beweis (quasilinearer Fall)

Auch im quasilinearen Fall ist neben der PDG eine Cauchy-Bedingung $u(x) = u_0(x)$ für $x \in S$ mit geeigneter Hyperfläche $S \subset \Omega$ und $u_0 \colon S \to \mathbb{R}$ sinnvoll, und das rechnerische Vorgehen ändert sich nur wenig:

- Löse gekoppeltes AWP für $(\gamma_{x_0}, \nu_{x_0})$ mit $x_0 \in S$,
  erhalte $\gamma_{x_0}(t)$ und $u(\gamma_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t)$ als Terme in t, x_0.
- Löse $x = \gamma_{x_0}(t)$ nach (t, x_0) auf, erhalte Lösung $u(x)$ als Term in x.

Beweis des allgemeinen Prinzips: Für festes x_0 kürze GDG-Lösungen als $\gamma = \gamma_{x_0}$ und $y = y_{x_0}$ auf $I = I_{x_0}$ ab, zeige die zwei Implikationen einzeln:

(2)$\Longrightarrow$(1) (i.W. wie linearer Fall): Mit $u(\gamma) = \nu$ rechne (an Stellen $t \in I_{x_0}$):

$$a(\gamma, u(\gamma)) \cdot \nabla u(\gamma) = a(\gamma, \nu) \cdot \nabla u(\gamma) \overset{\text{GDG für } \gamma}{=} \gamma' \cdot \nabla u(\gamma)$$
$$= \big[u(\gamma)\big]' = \nu' \overset{\text{GDG für } \nu}{=} b(\gamma, \nu) = b(\gamma, u(\gamma))\,.$$

Da jedes $x \in \Omega$ Form $x = \gamma_{x_0}(t)$ (tatsächlich $x = \gamma_x(0)$) hat, erhalte PDG.

Beweis (quasilinearer Fall; Fortsetzung)

Beweis-Fortsetzung:

(1)$\Longrightarrow$(2) (wobei nun Nachweis $u(\gamma) = \nu$ etwas subtiler): Für

$$\psi(t) := \nu(t) - u(\gamma(t)) \qquad \text{für } t \in I$$

erhalte

$$\psi' = \nu' - \gamma' \cdot \nabla u(\gamma) = b(\gamma, \nu) - a(\gamma, \nu) \cdot \nabla u(\gamma)\,.$$

Beobachte: Wüsste man $\nu = u(\gamma)$ und könnte ν durch $u(\gamma)$ ersetzen, so würde die rechte Seite nach PDG Null. Aber $u(\gamma) = \nu$ ist gerade zu zeigen.

Jedenfalls ist $\psi(0) = 0$ gemäß ABen. Ist $\psi \not\equiv 0$, so gibt es „letzte Stelle" $t_* \in I$ mit $\psi(t_*) = 0$. Nutze dann $|\partial_y b(x, y) - \partial_y a(x, y) \cdot \nabla u(x)| \le C$ für (x, y) nahe $(\gamma(t_*), \nu(t_*))$ mit Schranke C, bekomme für t nahe t_* durch Abschätzung des Ersetzungsfehlers $|\psi'| \le C|\nu - u(\gamma)| = C|\psi|$. Mit dem nächsten Lemma folgere $\psi \equiv 0$ nahe t_*, was der Wahl von t_* als „letzte Stelle" widerspricht. Es bleibt nur $\psi \equiv 0$ und m.a.W. $u(\gamma) = \nu$ auf I. □

Lemma für den Beweis (quasilinearer Fall)

Lemma

Genügt $\psi \in \mathrm{C}^1(I)$ einer Differentialungleichung $|\psi'| \le C|\psi|$ auf Intervall I mit $C \in [0,\infty)$, so folgt aus $\psi(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in I$ schon $\psi \equiv 0$ auf I.

Beweis: Angenommen es ist $\psi(b) \neq 0$ für ein $b \in I$. Sei $t_* \in I$ die zu b nächste Stelle mit $\psi(t_*) = 0$. Im Fall $t_* < b$ erhalte für $t_* < a \le b$ stets

$$\log \frac{|\psi(b)|}{|\psi(a)|} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log|\psi(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}\,\mathrm{d}t \le \int_a^b \frac{|\psi'(t)|}{|\psi(t)|}\,\mathrm{d}t \le C(b-a)\,,$$

also $|\psi(b)| \le \mathrm{e}^{C(b-a)}|\psi(a)|$. Für $a \to t_*$ folgt $|\psi(b)| \le \mathrm{e}^{C(b-t_*)}\psi(t_*) = 0$ und widerspricht $\psi(b) \neq 0$. Falls $t_* > b$, erhalte mit $b \le a < t_*$ und $-\int_b^a \ldots$ auf ähnliche Weise einen Widerspruch. Also ist $\psi(b) = 0$ für alle $b \in I$. $\square$

Bemerkung: Das Lemma ist Spezialfall des sogenannten Gronwall-Lemmas, das Lösungen zu Differentialungleichungen durch Lösungen zugehöriger GDG abschätzt. (Hier ist die GDG $\psi' = \psi$ mit AB $\psi(t_0) = 0$, und das hat nur $\psi \equiv 0$ als Lösung.)

Beispiel zur Methode der Charakteristiken (quasilinear)

Betrachte als Beispiel das Cauchy-Problem zur PDG

$$\begin{aligned} x\,u(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2y\,u(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -u(x,y)^2 \quad \text{für } (x,y) \in \Omega\,, \\ u(x, 2x-1) &= 1 \quad \text{für } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

mit dem sinnvollem Gebiet $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\,, y < x^2\}$ (vgl. unten).

Löse schrittweise (wobei $0 < x_0 < 1$ und $\gamma_{x_0} = \gamma_{(x_0, 2x_0-1)}$, $\nu_{x_0} = \nu_{(x_0, 2x_0-1)}$):

$\overset{\text{lese ab}}{\rightsquigarrow}$ PDG ist quasilinear mit $a(x,y,w) = (xw, 2yw)$, $b(x,y,w) = -w^2$.

$\overset{\text{lese ab}}{\rightsquigarrow}$ Zugehöriges charakteristisches GDG-System lautet

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= \nu\,\gamma_1 && \text{mit AB } \gamma_1(0) = x_0\,, \\ \gamma_2' &= 2\nu\,\gamma_2 && \text{mit AB } \gamma_2(0) = 2x_0-1\,, \\ \nu' &= -\nu^2 && \text{mit AB } \nu(0) = 1\,. \end{aligned}$$

$\overset{\text{löse für } \nu}{\rightsquigarrow}$ $u(\gamma_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t) = (t+1)^{-1}$

Beispiel zur Methode der Charakteristiken (Fortsetzung)

vereinfache für γ $\rightsquigarrow$
$$\gamma_1'(t) = (t+1)^{-1}\,\gamma_1(t) \quad \text{mit AB } \gamma_1(0) = x_0\,,$$
$$\gamma_2'(t) = 2(t+1)^{-1}\,\gamma_2(t) \quad \text{mit AB } \gamma_2(0) = 2x_0-1$$

löse für γ $\rightsquigarrow$ charakteristische Kurven: $\gamma_{x_0}(t) = \begin{pmatrix} x_0(t+1) \\ (2x_0-1)(t+1)^2 \end{pmatrix}$

Nun bemerke $I_{x_0} = (-1,\infty)$, eliminiere bei $\binom{x}{y} = \gamma_{x_0}(t)$ erst x_0 durch $\frac{2x}{t+1} = 2x_0 = \frac{y}{(t+1)^2}+1$ und löse dann eine quadratische Gleichung in t zu $t = x-1+\sqrt{x^2-y}$ (nur Vorzeichen „+“ vor Wurzel, weil $\frac{x}{t+1} = x_0 < 1$ ist).

$\nu_{x_0}(t)=(t+1)^{-1}$ $\rightsquigarrow$ Lösung Cauchy-Problem zur PDG: $u(x,y) = \left(x+\sqrt{x^2-y}\right)^{-1}$

Geometrischer Hintergrund: γ_{x_0} durchläuft den Parabelast $\{(x, a_{x_0}x^2) : 0<x<\infty\}$ mit $a_{x_0} := (2x_0-1)/x_0^2$ in Richtung weg vom Ursprung, wobei für $0 < x_0 < 1$ alle $a_{x_0} \in (-\infty, 1)$ realisiert werden. Alle Äste zusammen bilden das eingangs definierte Ω, auf dem man das Problem dieses Beispiels gerade noch lösen kann.

Abschließende Bemerkungen zur Charakteristiken-Methode

Abschließende Bemerkungen zur Charakteristiken-Methode:

- Man kann das GDG-System für (γ, ν) nicht unbedingt explizit lösen.
  Für $a(x, w)$ unabhängig von w (semilinearer Fall) betrachte erst die GDG für γ, die dann unabhängig von ν sind. Für $b(x, w)$ unabhängig von x (wie im vorigen Beispiel) betrachte erst die GDG für ν, die dann unabhängig von γ ist. Im Allgemeinen können die GDG aber voll gekoppelt und guter Rat teuer sein.
- Auch das Auflösen von $x = \gamma_{x_0}(t)$ kann nicht explizit möglich sein oder prinzipiell scheitern, weil sich etwa verschiedene γ_{x_0} schneiden. In guten Fällen ist zumindest lokales Auflösen möglich, und man kann mit der Methode lokale Existenzsätze beweisen; dazu aber keine Details!
- Weitere quasilineare Fälle und Beispiele folgen im nächsten Abschnitt.
- Man kann die Methode prinzipiell sogar auf den voll nichtlinearen Fall erweitern. Das charakteristische GDG-System wird dann aber noch komplizierter und beinhaltet auch Platzhalter für Ableitungen von u. Auch hierzu keine Details!

Literatur/Quellen (vorläufig; wird noch erweitert)

Vorlesungsmaterial:

- Vorlesungsfolien von H.J. OBERLE und J. STRUCKMEIER.
- Eigenes Skript „Partial Differential Equations I“.

Bücher:

- L.C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.