Differentialgleichungen II

Wärmeleitungsgleichung

Wärmeleitungsgleichung

Problemstellung: (Wärmeleitungsgleichung)
Gesucht sind explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta_x u.$$

- $t \geq 0$ ist die Zeitvariable
- $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist die Ortsvariable

Anfangswertproblem: (Cauchy-Problem)
Sei $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = & \Delta_x u & \text{in} & \mathbb{R}^n \times]0,T] \\ u = & g & \text{auf} & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Zusammenfassung: (Produkt-Ansatz)

- Gegeben das eindimensionale Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = & u_{xx}, & \text{für} & 0 < t < \pi,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = & \sin x & \text{für} & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = & 0 & \text{für} & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- Wähle Produktansatz für die Lösung:

$$u(x,t) = q(t) \cdot p(x).$$

- Erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) + \tilde{k} q(t) &= 0, \\ p''(x) + \tilde{k} p(x) &= 0. \end{aligned}$$

- Lösungsklassen abhängig von $\tilde{k}$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_0 e^{-\tilde{k}t} \cdot (c_1 x + c_2) \\ u(x,t) &= c_0 e^{-\tilde{k}t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\tilde{k}|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\tilde{k}|}x}) \\ u(x,t) &= c_0 e^{-\tilde{k}t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\tilde{k}}x) + c_2 \cos(\sqrt{\tilde{k}}x)) \end{aligned}$$

- Parameter $\{c_0, c_1, c_2, \tilde{k}\}$ i.A. nicht allein mit vorgegebenen Anfangs-Randbedingungen bestimmbar.

Problemstellung: (Wärmeleitungsgleichung)
Gesucht sind explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta_x u.$$

- $t \geq 0$ ist die Zeitvariable
- $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist die Ortsvariable

Anfangswertproblem: (Cauchy-Problem)
Sei $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = & \Delta_x u & \text{in} & \mathbb{R}^n \times]0,T] \\ u = & g & \text{auf} & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Anfangs-Randwertproblem:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\begin{cases} u_t = & \Delta_x u & \text{in} & U_T := U \times]0,T] \\ u = & g & \text{auf} & \Gamma_T := \overline{U_T} \backslash U_T \end{cases}$$

2

Zusammenfassung: (Produkt-Ansatz)

- Gegeben das eindimensionale Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = & u_{xx} & \text{für} & 0 < t < \pi,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = & \sin x & \text{für} & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = & 0 & \text{für} & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- Wähle Produktansatz für die Lösung:

$$u(x,t) = q(t) \cdot p(x).$$

- Erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) + \delta q(t) &= 0, \\ p''(x) + \delta p(x) &= 0. \end{aligned}$$

- Lösungsklassen abhängig von δ:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 x + c_2) \\ u(x,t) &= c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}) \\ u(x,t) &= c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)) \end{aligned}$$

- Parameter $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ i.A. nicht allein mit vorgegebenen Anfangs-Randbedingungen bestimmbar.

Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Definition: (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkungen: (Lösung für das Cauchy-Problem)
Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x},t)$ lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u = g & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

3

Definition: (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkungen:

- Insbesondere ist die Fundamentallösung normiert, d.h. für alle $t > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x},t)\, d\mathbf{x} = 1.$$

- Die Fundamentallösung besitzt für $t = 0$ und $x = 0$ Singularitäten.

Bemerkungen: (Lösung für das Cauchy-Problem)
Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x}, t)$ lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

3

Lösungsdarstellungen der Wärmeleitungsgleichung

Das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s) f(\mathbf{y},s)\,d\mathbf{y}\,ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y},s)\,d\mathbf{y}\,ds \end{aligned}$$

Das inhomogene Anfangswertproblem mit inhomogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x}) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(y)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s) f(\mathbf{y},s)\,dy\,ds.$$

Duhamel'sches Prinzip:

Die Funktion $u(\mathbf{x},t;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s) f(\mathbf{y},s)\,d\mathbf{y}$ löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot\,;s) - \Delta u(\cdot\,;s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(\cdot\,;s) = f(\cdot\,;s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{cases}$$

Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s:

$$u(\mathbf{x},t) = \int_0^t u(\mathbf{x},t;s)\,ds$$

Das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \end{aligned}$$

Duhamel'sches Prinzip:

Die Funktion $u(\mathbf{x}, t; s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$ löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot\,; s) - \Delta u(\cdot\,; s) &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot\,; s) &= f(\cdot\,; s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases}$$

Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s:

$$u(\mathbf{x}, t) = \int\limits_0^t u(\mathbf{x}, t; s)\, ds$$

Das inhomogene Anfangswertproblem mit inhomogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u(\mathbf{x}, 0) &= g(\mathbf{x}) \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds.$$

Lösungs-Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Beschreibung von Mittelwertformeln.
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Die Menge

$$U_T := U \times]0,T]$$

heißt parabolischer Zylinder mit dem parabolischen Rand $\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_t$.

- Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \left\{ (\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

- Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$. Man nennt $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch Wärmekugel (heat ball).

Satz: (Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung)
Ist $u \in C_1^2(U_t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x},t;r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2} u(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_t$.

Bemerkung:
Man kann zeigen, dass für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren.
Nur die Nullösung erfüllt die Wachstumsbedingung,
alle anderen Lösungen wachsen rapide an.

Berapel
Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Satz: (Lösungen des Cauchy-Problems unter Wachstumsbedingung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

auf dem beschränkten gesamten $\mathbb{R}^n$ mit stetigen Funktionen f und g besitzt unter der zusätzlichen Wachstumsbedingung

$$|u(\mathbf{x}, t)| \leq Ae^{a|\mathbf{x}|^2} \quad (A, a > 0)$$

maximal eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times]0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.

Satz: (Maximumprinzipien der Wärmeleitungsgleichung)
Sei $u \in C_1^2(U_t) \cap C(\overline{U_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt

1. Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x},t) \in \overline{U_T}} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x},t) \in \Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

2. Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x},t) \in \overline{U_T}} u(\mathbf{x}, t),$$

so folgt, dass u auf U_T konstant ist.

Satz: (Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } U_t \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet U_T mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$.

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Beschreibung von Mittelwertformeln.
- Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Die Menge

$$U_T := U \times]0, T]$$

  heißt parabolischer Zylinder mit dem parabolischen Rand $\Gamma_T := \overline{U_T} \backslash U_t$.

- Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \left\{ (\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

- Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$. Man nennt $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch Wärmekugel (heat ball).

Satz: (Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung)
Ist $u \in C_1^2(U_t)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x},t;r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t-s)^2} u(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_t$.

Satz: (Maximumprinzipien der Wärmeleitungsgleichung)
Sei $u \in C_1^2(U_t) \cap C(\overline{U_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt

1. Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{U_T}} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

2. Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{U_T}} u(\mathbf{x}, t),$$

   so folgt, dass u auf U_T konstant ist.

Satz: (Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } U_t \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet U_T mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$.

Beweis:

Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen.
Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ identisch verschwinden,
d.h. wir haben $u = \tilde{u}$.

Satz: (Lösungen des Cauchy-Problems unter Wachstumsbedingung)
Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

auf dem beschränkten gesamten $\mathbb{R}^n$ mit stetigen Funktionen f und g besitzt unter der zusätzlichen Wachstumsbedingung

$$|u(\mathbf{x},t)| \leq Ae^{a|\mathbf{x}|^2} \quad (A, a > 0)$$

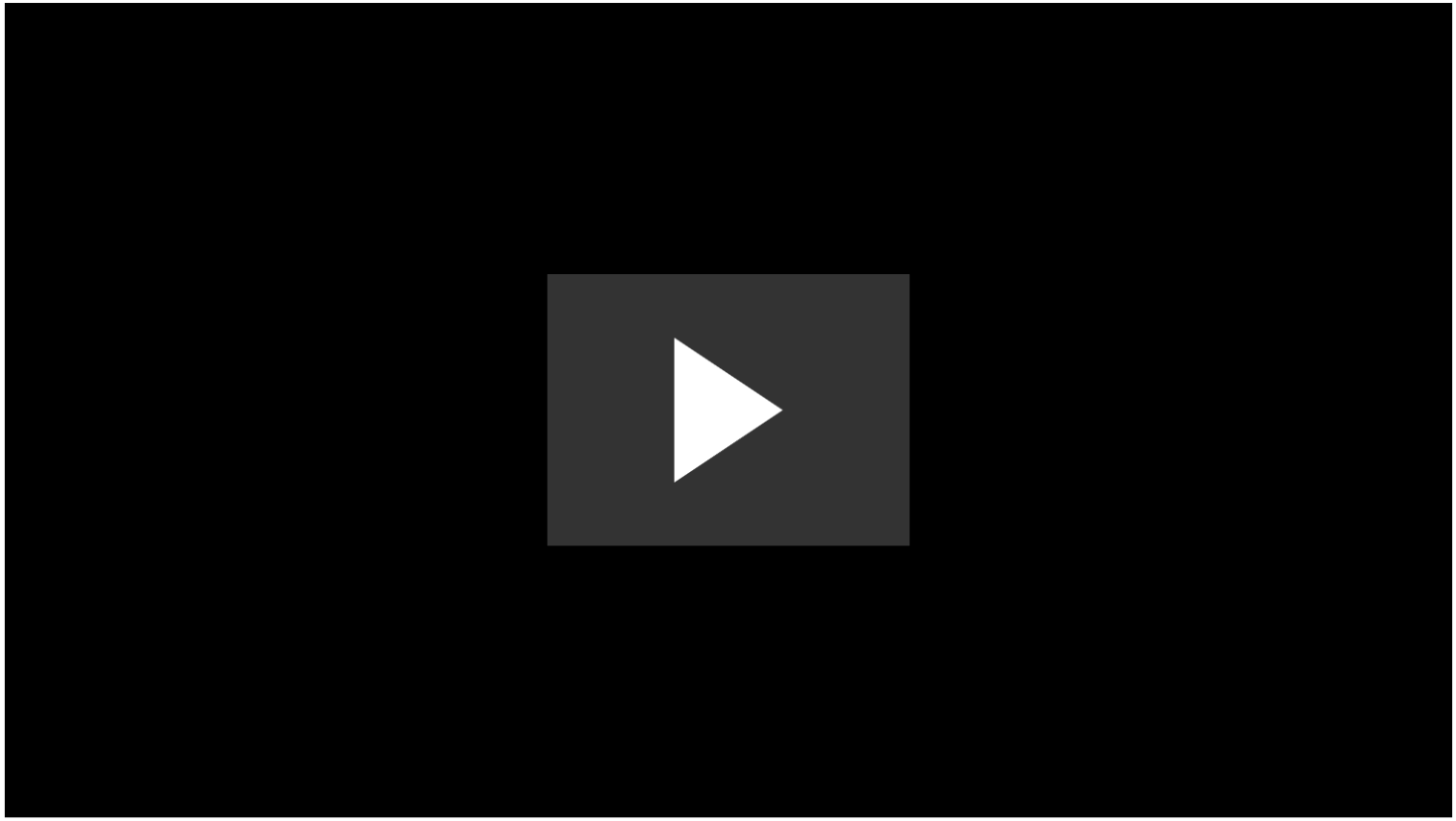
maximal eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times]0,T[) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.

Bemerkung:
Man kann zeigen, dass für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times]0,T[\\ u &= 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren.
Nur die Nulllösung erfüllt die Wachstumsbedingung,
alle anderen Lösungen wachsen rapide an.

Beispiel:
Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung



Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Wärmeleitungsgleichung

Differentialgleichungen II

Wärmeleitungsgleichung

Lösungsdarstellungen der Wärmeleitungsgleichung

Lösungs-Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung