Differentialgleichungen II

Woche 07 / J. Behrens

① Greensche Funktion im Halbraum $\mathbb{R}^n_+$:

- Greensche Funktion allgemein: $G(x,y) = \phi(y-x) - \phi^*(y)$

mit
$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & n \geq 3 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, $\alpha(n)$ Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$

$\phi^*(y)$ Lösung der 'Korrekturgleichung'

$$\Delta \phi^* = 0 \quad \text{im } \mathbb{R}^n_+$$

$$\phi^* = \phi(y-x) \quad \text{auf } \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$$

- Für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n_+$ definiere die Reflexion an der Ebene $\partial\mathbb{R}^n_+$:

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

- Betrachte $\phi^*(y) := \phi(y - \tilde{x}) = \phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n)$

- $\phi^*(y)$ so definiert ist harmonisch auf dem ganzen Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ und auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ gilt:

$$\phi^*(y) = \phi(y - \tilde{x}) = \phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, 0 + x_n)$$

wegen Symmetrie von ϕ

$$= \phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, -x_n) = \phi(y - x)$$

- Das heißt $\phi^x(y) = \phi(y-\tilde{x})$ löst das Randwertproblem

$$\Delta \phi^x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+$$
$$\phi^x = \phi(y-x) \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+ \quad .$$

- Damit erhalten wir die Greensche Fkt. auf $\mathbb{R}^n_+$: $G(x,y) = \phi(y-x) - \phi(y-\tilde{x})$

$x, y \in \mathbb{R}^n_+ \, , \, y \neq x$

- Es gilt:
$$\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y_n}(y-x) - \frac{\partial \phi}{\partial y_n}(y-\tilde{x})$$
$$= \frac{1}{n\alpha(n)}\left(\frac{y_n - x_n}{|y-x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y-\tilde{x}|^n}\right)$$

$$\Rightarrow \text{für } y \in \partial\mathbb{R}^n_+ : \quad \frac{\partial G}{\partial n}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x-y|^n}$$

② Vorgriff auf Woche 08 – Wärmeleitungsgleichung:

- Betrachte das 1-dimensionale Anfangs-Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} && 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq T \\
u(x,0) &= u_0(x) && 0 < x < \pi \\
\left.\begin{aligned} u(0,t) &= a(t) \\ u(\pi,t) &= b(t) \end{aligned}\right\} & && 0 \leq t \leq T
\end{aligned}
$$

- Gesucht ist die Lösung, Ansatz: Produktansatz

$$u(x,t) = p(x) \cdot q(t)$$

- Einsetzen:

$$p(x) \cdot \dot{q}(t) = q(t) \cdot p''(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = -\delta \qquad \text{vorausgesetzt } p(x) \neq 0,\ q(t) \neq 0)$$

- Folgerung: Da der linke Term nur von t abhängt und der rechte Term nur von x abhängt kann Gleichheit nur gelten, wenn gilt $\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = \text{konst.} =: -\delta$

- Erhalte also zwei gewöhnliche DGLn:

$$(1) \qquad \dot{q}(t) + \delta q(t) = 0$$

$$(2) \qquad p''(x) + \delta p(x) = 0$$

- Allgemeine Lösung von (1): $q(t) = c_0 e^{-\delta t}$

- Lösung von (2) hängt von δ ab:

  i) Für $\delta = 0$ lautet die allg. Lösung: $p(x) = c_1 x + c_2$

  ii) " $\delta < 0$ " : $p(x) = c_1 e^{-\sqrt{\delta} x} + c_3 e^{\sqrt{\delta} x}$

  iii) " $\delta > 0$ " : $p(x) = c_1 \sin(\sqrt{\delta} x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta} x)$

- Insgesamt ohne Berücksichtigung der Anfangs-/Randbed. erhalte Lösungsklassen:

  i) $u(x,t) = c_0 e^{-\delta t} (c_1 x + c_2)$ $\quad \delta = 0$

  ii) $u(x,t) = c_0 e^{-\delta t} (c_1 e^{-\sqrt{\delta} x} + c_3 e^{\sqrt{\delta} x})$ $\quad \delta < 0$

  iii) $u(x,t) = c_0 e^{-\delta t} (c_1 \sin(\sqrt{\delta} x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta} x))$ $\quad \delta > 0$

- Vorgegebene Bedingungen: $u(x,0) = u_0(x)$, $u(0,t) = a(t)$, $u(\pi,t) = b(t)$

  Unbekannte Parameter: c_0, c_1, c_2, δ

  <u>Fazit</u>: Die Parameter können i.A. nicht mit Hilfe der u_0, a, b bestimmt werden.

- <u>Beispiel</u>:

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T$$

$$u(x,0) = \sin x \qquad 0 < x < \pi$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad 0 \le t \le T$$

wegen $(\sin x)'' = -\sin x \Rightarrow \dfrac{p''(x)}{p(x)} = -\delta$ mit $\delta = 1 > 0$

damit kommt als Lösung die Klasse iii) in Betracht

$$u(x,t) = c_0 e^{-\delta t} (c_1 \sin(\sqrt{\delta} x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta} x))$$

Mit $u(x,0) = \sin x \Rightarrow c_2 = 0$ und $c_1 = 1, c_0 = 1$

Also erhalte als eine Lösung $u(x,t) = e^{-t} \sin x$.

<u>Superpositionsprinzip</u>:

- Jede Lösung der Form $u(x,t) = b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ erfüllt die homogenen Randbed. $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$
- Überlagerung / Linearkombination: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$ ergibt Anfangsbed. $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{b_k \sin(kx)}$
- Für gegebene Anfangsbedingungen $u_0(x)$ ist die rechte Seite eine Fourier-Reihe, d.h.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$