Differentialgleichungen II

Einführung

Ihr Professor

Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ Dept. Mathematik/ CEN
Grindelberg 5/ Bundesstraße 55
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde nach Vereinbarung per E-Mail

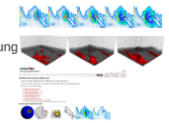
Hintergrund

Kurz-CV

seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung
Adaptive Atmosphären Modellierung
Gitter Erzeugung
Multi-Skalen Simulationen

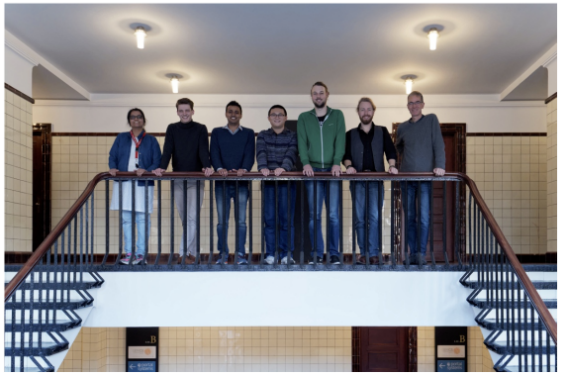


Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ Dept. Mathematik/ CEN
Grindelberg 5/ Bundesstraße 55
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde nach Vereinbarung per E-Mail

Hintergrund



Kurz-CV

seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

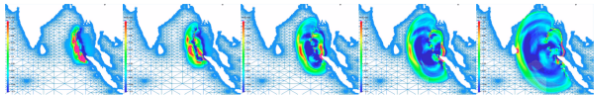
Forschungsinteressen

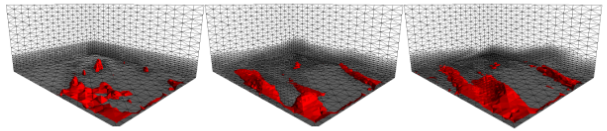
Adaptive Tsunami Modellierung

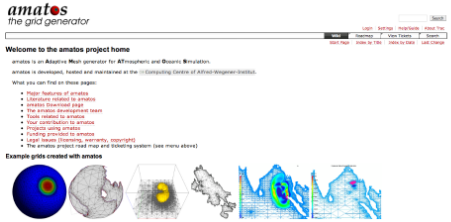
Adaptive Atmosphären Modellierung

Gitter Erzeugung

Multi-Skalen Simulationen







Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar: *Mathematik für Ingenieure 2* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2011.

I. Gasser: *Skriptum zur Vorlesung DGL II*, Sommersemester 2016.
https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/
Dr. Hanna Peywand Kiani https://www.math.uni-hamburg.de/home/kiani/

Materialien:
https://t1p.de/bh7u

Bitte gründlich vorbereiten!

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar: *Mathematik für Ingenieure 2* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2011.

I. Gasser: *Skriptum zur Vorlesung DGL II*, Sommersemester 2016.
https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Dr. Hanna Peywand Kiani https://www.math.uni-hamburg.de/home/kiani/

Materialien:

https://t1p.de/bh7u

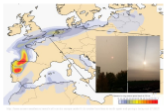
Bitte gründlich vorbereiten!

Motivation

Transportgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

Transport von Rauchwolken



Transport von Vulkanasche

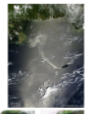
Eyjafjallajokull Eruption, Mai 2010

Satellitenbeobachtung Simulation

Arctischer Ozonabbau

Ölausbreitung

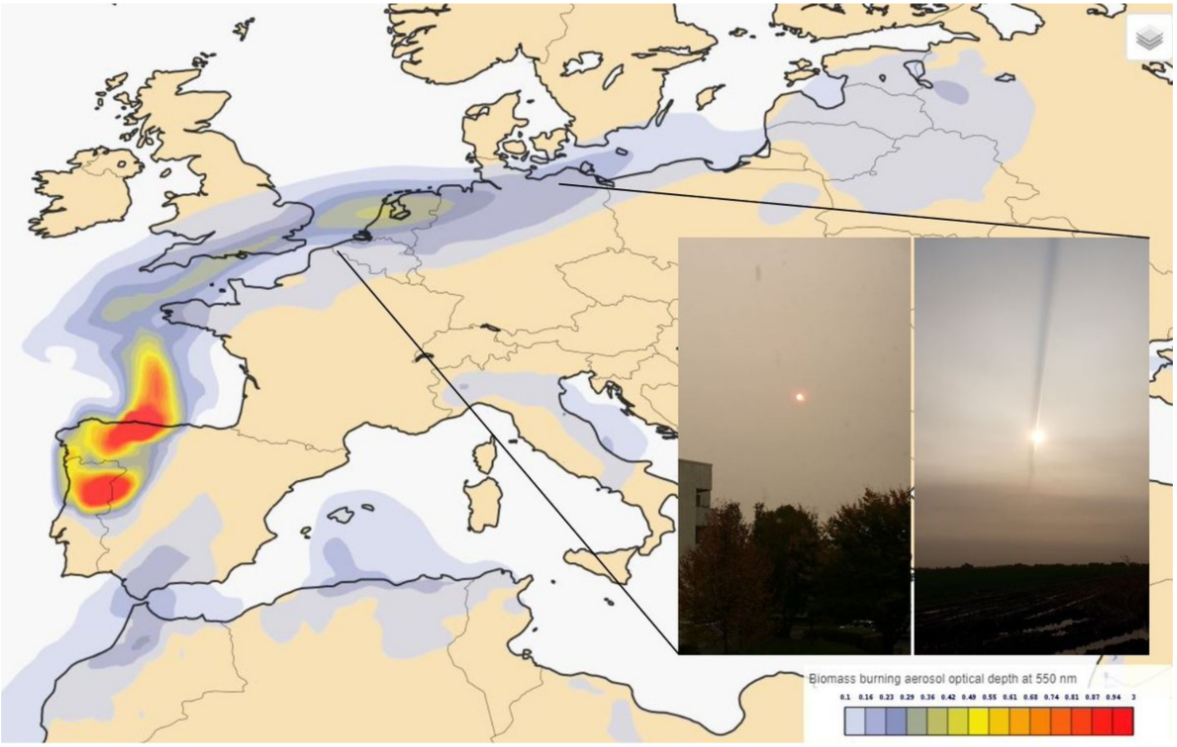
Satellitenaufnahmen des Deepwater Horizon Unfalls April 2010



Transportgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

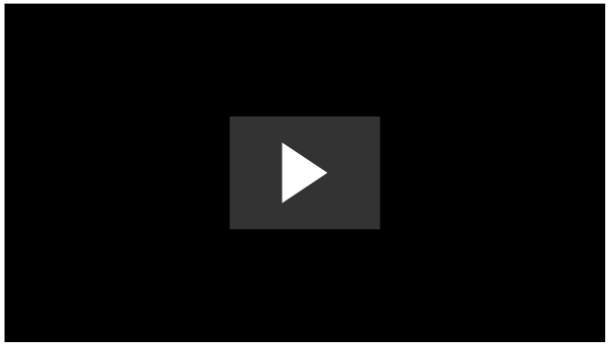
Transport von Rauchwolken



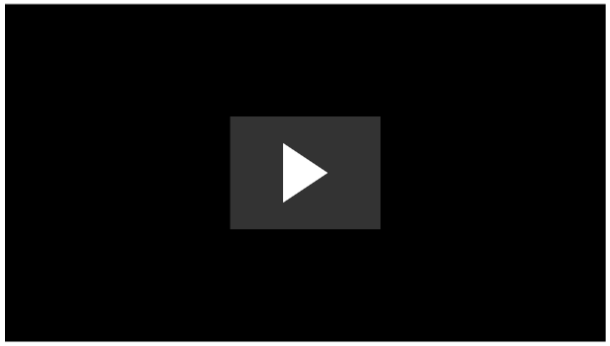
http ://www.severe-weather.eu/news/north-central-europe-under-thick-smoke-from-fires-in-north-spain-and-portugal-today-oct-17-2017/

Transport von Vulkanasche

Eyjafjallajokull Eruption, Mai 2010



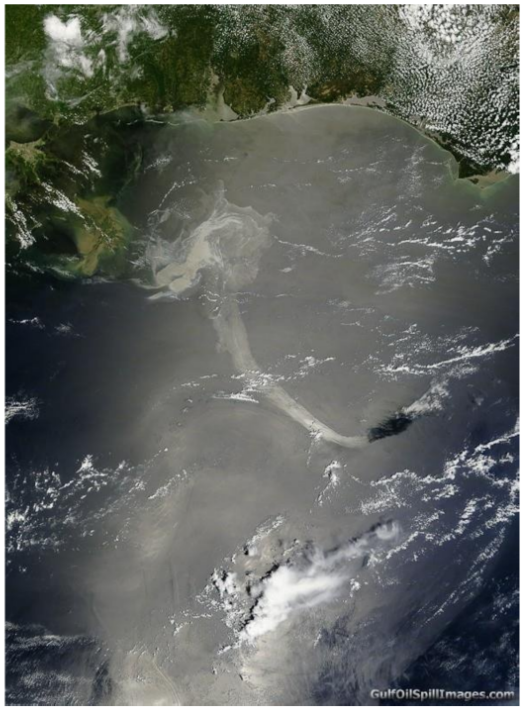
Satellitenbeobachtung

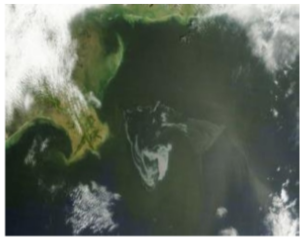


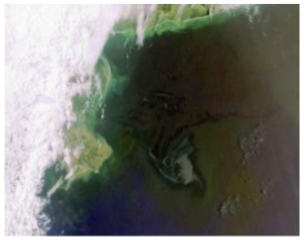
Simulation

Ölausbreitung

Satellitenaufnahmen des Deepwater Horizon Unfalls
April 2010







Arctischer Ozonabbau

Vorgegebenes Windfeld in Arctischer Stratosphäre (ca. 18 km Höhe)

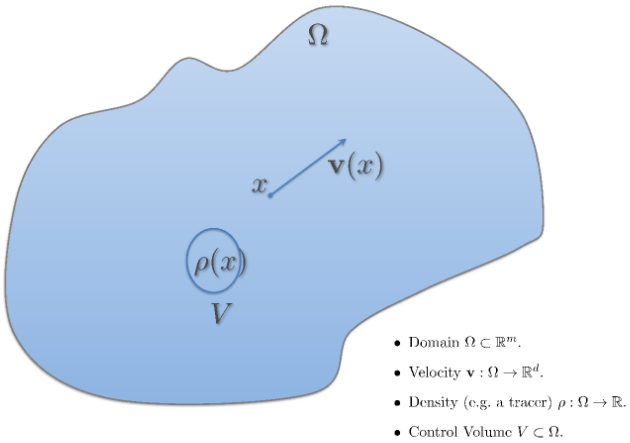
http://www.lib.utexas.edu/maps

Erhaltungsprinzip

Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Erhaltung) her!

Masse M im Kontrollvolumen V

$$M = \int_V \rho(x)\ dx$$



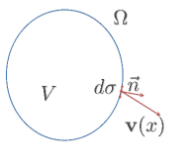
Massenbalance

Massenänderung (infinitesimales Zeitinterval):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho(x)\ dx\right)\cdot dt$$

Fluss-Rate (über Ränder)

$$\int_{\partial V} \rho\cdot\langle\vec{n},\mathbf{v}\rangle\ d\sigma dt$$



$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(x)\ dx = -\int_{\partial V} \rho\cdot\langle\vec{n},\mathbf{v}\rangle\ d\sigma$$

Kontinuitätsgleichung

Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes:

$$\int_{\partial V} \rho \langle \mathbf{v}, \vec{n} \rangle \; d\sigma = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \; dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(x) \; dx = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \; dx$$ gilt für alle V

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(x) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0}$$

Variationsprinzip

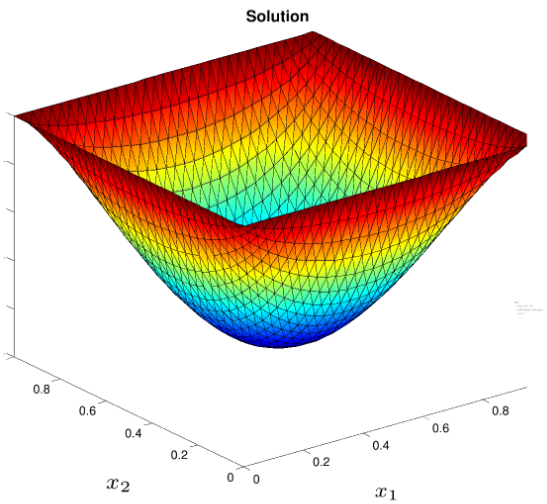
Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Minimierung) her!

Membran = Minimalfläche

Minimierungsproblem: Minimiere Beugungsenergie

$$J = \int_\Omega \sqrt{1 + \partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2}\; dx_1 dx_2 \stackrel{!}{=} \min$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi$$



Herleitung

Für

$$\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) \ll 1,$$

(d.h. ∇u klein), nehmen wir an

$$\sqrt{1 + \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u} \approx 1 + \frac{1}{2}(\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_\Omega (\partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2) \, dx_1 dx_2 \stackrel{!}{=} \min$$

Poisson Gleichung

Setze: $F(u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u) := \partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2$

Dann gilt:

Falls $J = \frac{1}{2} \int_\Omega (\partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2) \, dx_1 dx_2 \overset{!}{=} \min$

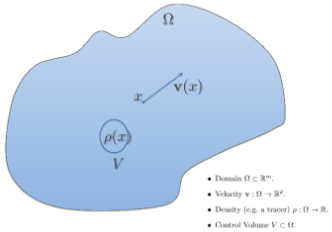
$$\boxed{\Delta u := (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) u = 0}$$

Erhaltungsprinzip

Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Erhaltung) her!

Masse M im Kontrollvolumen V

$$M = \int_V \rho(x)\ dx$$



Variationsprinzip

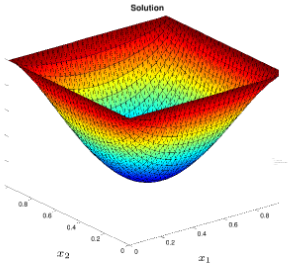
Idee: Leite PDGl aus physikalischem Gesetz (Minimierung) her!

Membran = Minimalfläche

Minimierungsproblem: Minimiere Beugungsenergie

$$J = \int_\Omega \sqrt{1 + \partial_{x_1} u^2 + \partial_{x_2} u^2}\ dx_1 dx_2 \stackrel{!}{=} \min$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi$$



Notationen und Definitionen

Definition: (Partielle Differentialgleichung)
Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_1}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p-1} x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_n}\right) = \mathbf{0}$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt ein System partieller Differentialgleichungen (PDG oder PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p-ter Ordnung ($\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p_1} x_1 \cdots \partial^{p_n} x_n}$) explizit auf, so spricht man von einer PDG der Ordnung p.

Bemerkungen:

- In Anwendungen treten oft Ortsvariablen auf: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Häufig ist $n = 3$.
- Entsprechend ist häufig eine Zeitvariable ausgezeichnet: $t \in \mathbb{R}$.
- Betrachte dann die allgemeinte PDG in $(n+1)$ Variablen

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p}\right) = \mathbf{0}.$$

- Differentialoperatoren wie etwa

$$\nabla, \ \mathrm{div}, \ \mathrm{rot}, \Delta$$

beziehen sich dann stets auf die n Ortsvariablen, zum Beispiel

$$\mathrm{div} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Definition: (lineare/nichtlineare PDG)

1. Eine PDG heißt linear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.
2. Eine PDG heißt semilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist und die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ abhängen.
3. Eine PDG heißt quasilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}$ abhängen.
4. In allen anderen Fällen heißt die PDG nichtlinear.

Beispiele:

1. Skalare lineare PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$a_1(x, y) u_x + a_2(x, y) u_y + b(x, y) u = c(x, y).$$

2. Skalare quasilinear PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$a_1(x, y, u) u_x + a_2(x, y, u) u_y + = g(x, y, u).$$

3. Semilineares System von PDG 2. Ordnung in n Variablen:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) u_{x_i x_j} = b(x_1, \ldots, x_n, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{x_1}, \ldots, \mathbf{u}_{x_n}).$$

4. Nichtlineare skalier PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x, y, u, u_x \cdot u_y).$$

Definition: (Partielle Differentialgleichung)
Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_1}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p-1} x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^p x_n}\right) = \mathbf{0}$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt ein System partieller Differentialgleichungen (PDG oder PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p-ter Ordnung ($\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial^{p_1} x_1 \cdots \partial^{p_n} x_n}$) explizit auf, so spricht man von einer PDG der Ordnung p.

Bemerkung: In Anwendungen treten typischerweise (Systeme von) PDG erster und zweiter Ordnung auf.

Definition: (lineare/nichtlineare PDG)

1. Eine PDG heißt linear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.

2. Eine PDG heißt semilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist und die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ abhängen.

3. Eine PDG heißt quasilinear, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}$ abhängen.

4. In allen anderen Fällen heißt die PDG nichtlinear.

Beispiele:

1. Skalare lineare PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u_y + b(x,y)u = c(x,y).$$

2. Skalare quasilinear PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$a_1(x,y,u)u_x + a_2(x,y,u)u_y + = g(x,y,u).$$

3. Semilineares System von PDG 2. Ordnung in n Variablen:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)u_{x_i x_j} = b(x_1,\ldots,x_n,\mathbf{u},\mathbf{u}_{x_1},\ldots,\mathbf{u}_{x_n}).$$

4. Nichtlineare skalier PDG 1. Ordnung in zwei Variablen:

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x,y,u,u_x \cdot u_y).$$

Bemerkungen:

- In Anwendungen treten oft Ortsvariablen auf: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Häufig ist $n = 3$.
- Entsprechend ist häufig eine Zeitvariable ausgezeichnet: $t \in \mathbb{R}$.
- Betrachte dann die allgemeinte PDG in $(n+1)$ Variablen

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p}\right) = \mathbf{0}.$$

- Differentialoperatoren wie etwa

$$\nabla, \ \mathrm{div}, \ \mathrm{rot}, \Delta$$

  beziehen sich dann stets auf die n Ortsvariablen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \mathrm{div} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \Delta &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

Mathematische Modellierung mit PDG

Reynoldscher Transportsatz

Osborne Reynolds (1842-1912)

Kontinuitätsgleichung

Diffusionsgleichung

Reynoldscher Transportsatz

Vorbemerkungen:
Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe ein Gebiet (beschränkte offene Menge) $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein.
Größen sind beispielsweise *Ladung* (Elektrodynamik) oder *Dichte* (Fluiddynamik).
Die Funktion $\phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung eines Punktes $\mathbf{y}_0 \in D_0$ in der Zeit:

$$\phi : D_0 \times [0, T] \to D_t \subset \mathbb{R}^n, \quad D_t := \{\phi(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in D_0\}.$$

Die Trajektorie von $\mathbf{y} \in D_0$ ist die Abbildung

$$\tau : t \mapsto \phi(\mathbf{y}, t) \in D_t$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichnet das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Osborne Reynolds (1842-1912)

Theorem: (Reynoldscher Transportsatz)
Für eine beliebige differenziertere, skalare Funktion $F : D_t \times [0, T] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla \cdot (f\mathbf{v})\right](\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}.$$

Erinnere: $\operatorname{div}\ \mathbf{y} = \nabla \cdot \mathbf{y}$.

Beweisidee:

- Transformiere linke Seite von D_t auf D_0:
$$\int_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x} = \int_{D_0} f(\phi(\mathbf{y}(t), t)J(\mathbf{y}, t)\ d\mathbf{y}.$$
wobei $J(\mathbf{y}, t) := \det(D_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}, t))$ die Jacobi-Matrix von $\phi(\mathbf{y}, t)$ bezüglich $\mathbf{y}$ ist.
- Berechne die zeitliche Ableitung der obigen rechten Seite:
$$\frac{d}{dt}\int_{D_0} f(\phi(\mathbf{y}(t), t)J(\mathbf{y}, t)\ d\mathbf{y}.$$
- Transformiere dann zurück auf das zeitabhängige Gebiet D_t.

Vorbemerkungen:
Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe ein Gebiet (beschränkte offene Menge) $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein.
Größen sind beispielsweise *Ladung* (Elektrodynamik) oder *Dichte* (Fluiddynamik).
Die Funktion $\phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung eines Punktes $\mathbf{y}_0 \in D_0$ in der Zeit:

$$\phi : D_0 \times [0, T] \to D_t \subset \mathbb{R}^n, \quad D_t := \{\phi(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in D_0\}.$$

Die Trajektorie von $\mathbf{y} \in D_0$ ist die Abbildung

$$\tau : t \mapsto \phi(\mathbf{y}, t) \in D_t$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichnet das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Theorem: (Reynoldscher Transportsatz)
Für eine beliebige differenziertere, skalare Funktion $F : D_t \times [0, T] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f(\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} f + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x}.$$

Erinnere: $\operatorname{div} \mathbf{y} = \nabla \cdot \mathbf{y}$.

Beweisidee:

- Transformiere linke Seite von D_t auf D_0:

$$\int_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x} = \int_{D_0} f(\phi(\mathbf{y}t), t) J(\mathbf{y}, t)\ d\mathbf{y},$$

  wobei $J(\mathbf{y}, t) = \det(D_{\mathbf{y}}\phi(\mathbf{y}, t))$ die Jacobi-Matrix von $\phi(\mathbf{y}, t)$ bezüglich $\mathbf{y}$ sei.

- Berechne die zeitliche Ableitung der obigen rechten Seite:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} f(\phi(\mathbf{y}t), t) J(\mathbf{y}, t)\ d\mathbf{y}.$$

- Transformiere dann zurück auf das zeitabhängige Gebiet D_t.

Kontinuitätsgleichung

Kontinuitätsgleichung:

- Sei nun $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe (z.B. Fluiddichte).
- Es gelte ein Erhaltungsprinzip der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

- Nach Reynoldschem Transportsatz gilt dann:

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

- Da $D_t \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge, gilt die PDG (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Flussfunktion:

- Schreibe die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe einer Flussfunktion $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- Wir vermeiden *zwei* unbekannte Größen ρ und $\mathbf{q}$ in *einer* Gleichung durch

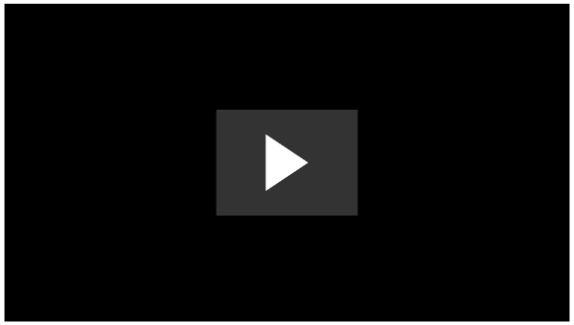
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\rho(\mathbf{x}, t), \nabla \rho(\mathbf{x}, t), \ldots).$$

- Beispiel: Der Fluss $\mathbf{q}$ ist proportional zur Dichte ρ, also

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

- Dann erhalten wir die (Transportgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}, t) = 0.$$



Kontinuitätsgleichung:

- Sei nun $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe (z.B. Fluiddichte).
- Es gelte ein Erhaltungsprinzip der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x} = 0.$$

- Nach Reynoldschem Transportsatz gilt dann:

$$\int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] (\mathbf{x}, t) \; d\mathbf{x} = 0.$$

- Da $D_t \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmenge, gilt die PDG (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Flussfunktion:

- Schreibe die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe einer Flussfunktion $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

- Wir vermeiden *zwei* unbekannte Größen ρ und $\mathbf{q}$ in *einer* Gleichung durch

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\rho(\mathbf{x}, t), \nabla\rho(\mathbf{x}, t), \ldots).$$

- Beispiel: Der Fluss $\mathbf{q}$ ist proportional zur Dichte ρ, also

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot \rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

- Dann erhalten wir die (Transportgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla\rho(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Diffusionsgleichung

Wärmeleitung oder Diffusion:

- Die Funktion $\rho(\mathbf{x}, t)$ beschreibe nun:
  - chemische Konzentration
  - Temperatur
  - elektro-statisches Potential
- Der Fluss $\mathbf{q}$ sei proportional zum Gradienten von ρ (mit umgekehrtem Vorzeichen):
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -a\nabla\rho(\mathbf{x}, t), \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$
- Dann folgt:
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (-a\nabla\rho(\mathbf{x}, t)) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) &= a\Delta\rho(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$
- Mit $a := 1$ erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung (oder Diffusionsgleichung):
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) = \Delta\rho(\mathbf{x}, t).$$

Bemerkung:
Die Abschlussrelation
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -a\nabla\rho(\mathbf{x}, t)$$
nennt man

- das Ficksche Gesetz der Diffusion,
- das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung, oder
- das Ohmsche Gesetz der elektrischen Ladung.

Beobachtung:
Drei verschiedene physikalische Probleme liefern dieselbe mathematische Gleichung!

Wärmeleitung oder Diffusion:

- Die Funktion $\rho(\mathbf{x}, t)$ beschreibe nun:
  - chemische Konzentration
  - Temperatur
  - elektro-statisches Potential
- Der Fluss $\mathbf{q}$ sei proportional zum Gradienten von ρ (mit umgekehrtem Vorzeichen):
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -a\nabla\rho(\mathbf{x}, t), \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$
- Dann folgt:
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (-a\nabla\rho(\mathbf{x}, t)) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) &= a\Delta\rho(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$
- Mit $a := 1$ erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung (oder Diffusionsgleichung):
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{x}, t) = \Delta\rho(\mathbf{x}, t).$$

Bemerkung:
Die Abschlussrelation

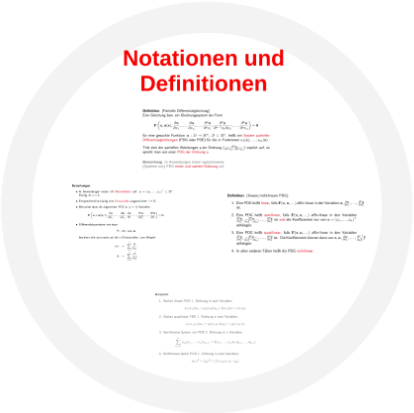
$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -a\nabla\rho(\mathbf{x}, t)$$

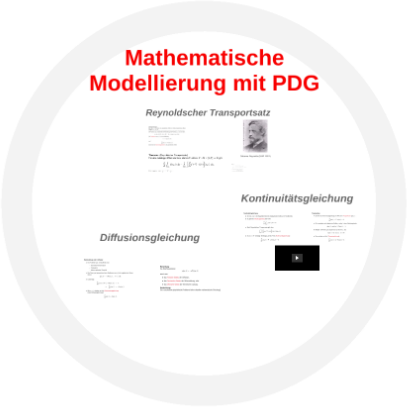
nennt man

- das Ficksche Gesetz der Diffusion,
- das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung, oder
- das Ohmsche Gesetz der elektrischen Ladung.

Beobachtung:
Drei verschiedene physikalische Probleme liefern dieselbe mathematische Gleichung!

Motivation
Transportgleichung:
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$
Transport von Rauchwolken
Transport von Vulkanasche
Arctischer Ozonabbau
Ozonbreitung


Notationen und Definitionen


Mathematische Modellierung mit PDG
Reynoldscher Transportsatz
Kontinuitätsgleichung
Diffusionsgleichung

Differentialgleichungen II

Infos zum Kurs

Ihr Professor