Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 12, 6. Juli 2017

Poisson Problem - Numerische Lösung mit finiten Elementen, Wärmeleitungsgleichung

Michael Hinze

Betrachte Wärmeleitungsgleichung

i) ARWA

$$(P)\quad \begin{cases} u_t(t,x) = a^2 \Delta_x u(t,x) + f(t,x) & t \in (0,T],\ x \in D \\ u(t,x) = g(t,x) & \text{für } t \in (0,T],\ x \in \partial D \quad \text{RBen} \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{für } x \in D \quad \text{AWe} \end{cases}$$

Dabei seien f, g und u_0 gegeben (Daten)

ii) Cauchy-Problem im $\mathbb{R}^n$

$$u_t = \Delta_x u \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \qquad (a \equiv 1)$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

<u>$n=1$</u>: Komplexe Funktionen Lösung $\quad u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi)\, d\xi$

<u>$n>1$</u>: $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-\xi, t)\, u_0(\xi)\, d\xi$ mit

$$\Phi(t,x) := \begin{cases} \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

siehe Bärwolff, bzw. Skript Struckmeier.

Zurück zu (P) im Fall $n=1$; Zerlege $u = \tilde{u} + v$, wobei $\tilde{u}$

$$(P_1) \qquad \begin{aligned} \tilde{u}_t - a^2 \tilde{u}_{xx} &= f \quad \text{in } (0,T] \times D \quad \text{mit } D = (0,\ell) \\ \tilde{u}(t,0) &= \tilde{u}(t,\ell) = 0 \quad \forall_{t \in (0,T]} \\ \tilde{u}(0,x) &= 0 \quad x \in D \end{aligned}$$

löst und v o.E. $g \equiv 0$

$$(P_2) \qquad \begin{aligned} v_t - a^2 v_{xx} &= 0 \quad \text{in } (0,T] \times D \\ v(t,0) &= v(t,\ell) = 0 \quad \forall_{t \in (0,T]} \\ v(0,x) &= u_0(x) \quad x \in D \end{aligned}$$

löst. Dann löst $\tilde{u} + v$ (P)

i) Löse (P_2) mit Trennung der Variablen: $v(t,x) := T(t)\, X(x)$

Wärmeleitung liefert

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(\ell) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad X(x) = X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{Lösung, } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

Ferner

$$\dot{T} + \lambda a^2 T = 0 \quad \longrightarrow \quad T(t) = T_n(t) = d_n\, e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

Superposition

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \qquad \text{mit } c_n \text{ aus}$$

$$v(0,x) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

Setze u_0 2ℓ-periodisch ungerade fort. Dann

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}t\,dt.$$

Damit v Lösung von (P_2) bekannt

ii) Bestimme Lösung $\tilde{u}$ von (P_1):

Ansatz: $$\tilde{u}(t,x) = \sum_{n=1}^\infty A_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \qquad (*)$$

Damit $\tilde{u}(t,0) = 0$ $\tilde{u}(t,\ell)$ RWe sind erfüllt.

Sei f (recht) hinreichend glatt. Dann (nach 2ℓ-periodischer, ungerader Fortsetzung)

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x \quad \text{mit } f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(s,t)\sin\frac{n\pi}{\ell}s\,ds$$

Setze $(*)$ und f in (P_1) ein:

$$\sum_{n=1}^\infty \left[A_n'(t) + a^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 A_n(t) - f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{\ell}x \stackrel{!}{=} 0 \qquad \forall_{t,x}$$

$$\Longrightarrow \quad A_n'(t) + a^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 A_n(t) = f_n(t) \qquad t\in(0,T]$$
$$A_n(0) = 0 \qquad (\Rightarrow \text{AW erfüllt})$$

mit Lösung $$A_n(t) = \int_0^t e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Setze $u := v + \tilde{u}$. Dann löst u (P)

Für Konvergenz der Fourierreihen: $u_0 \in C^3([a,l])$, $f(t,\cdot)$ analog.

Bsp: $a=1$, $f \equiv 0$, $u_0(x) = \sin x$ $\quad l=\pi$

$u = \tilde{u} + v$ Lösung mit $\tilde{u} \equiv 0$ (weil $f=0$).

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin(nx)\,dx = 0 \quad n \neq 1$$

$$\Rightarrow \quad u(t,x) = e^{-t} \sin x \,. \qquad \boxtimes$$

Ende