180517 [redacted]

Wellengleichung in 3 Raumdimensionen: für $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$

$$u_{tt}(x,t) = c^2 \Delta_x u(x,t)$$

Dabei $\Delta_x k(x) = \sum_{i=1}^{3} k_{x_i x_i}(x)$

Laplace-Operator

Koordinaten Transformationen

i.) $x = \rho \cos\phi \quad y = \rho \sin\phi, \; z = z$

Zylinderkoordinaten $\rho \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$

Sei

$$\hat{u}(x,y,z,t) = \hat{u}(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z, t) =: u(\rho, \phi, z, t)$$

③ Transformation der Differentialoperatoren: $(z_x = 0, t_x = 0)$

$$\hat{u}_x = u_\rho \rho_x + u_\phi \phi_x$$

$$\hat{u}_t = u_t$$

$\rho_x = \frac{d\rho}{dx}$, $\rho_y = \frac{d\rho}{dy}$ aus

$$1 = \frac{dx}{dx} = \rho_x \cos\phi - \rho \sin\phi \, \phi_x$$

$$0 = \frac{dx}{dy} = \rho_y \cos\phi - \rho \sin\phi \, \phi_y$$

$$1 = \frac{dy}{dy} = \rho_y \sin\phi + \rho \cos\phi \, \phi_y$$

$$0 = \frac{dy}{dx} = \rho_x \sin\phi + \rho \cos\phi \, \phi_x$$

Damit: $\rho_x = \cos\phi \quad \rho_y = \sin\phi$

$\phi_x = \frac{1}{\rho} \sin\phi \quad \phi_y = \frac{1}{\rho} \cos\phi$

180517 [redacted]

Analog mit 2ten Ableitungen.

Nach "langer" Rechnung ergibt sich

$$u_{tt} = c^2\Big[\underbrace{u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho}_{\frac{1}{\rho}(\rho u_\rho)_\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}\Big]$$

Wellengleichung in Zylinderkoordinaten

u Lösung $\Rightarrow$

$$\hat{u}(x,y,z,t) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}, z, t\right)$$

ii) Kugelkoordinaten

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$

(4)

$z = r\cos\theta$ mit $r \geq 0$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$

Wieder $\hat{u}(x,y,z,t) =: u(r,\theta,\varphi,t)$

Wellengleichung in Kugelkoordinaten

$$u_{tt} = c^2\Big[\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta\, u_\theta)_\theta\Big]$$

Zylinder- und Kugelwellen

i) Suche Lösungen $u = u(\rho,t)$, d.h. u unabhängig von φ und z sein (Darstellung in Zylinderkoordinaten)

180517 [redacted]

Wellengleichung dann

$$u_{tt} = c^2 \frac{1}{s}(s u_s)_s \quad , s>0, \; t>0 .$$

Separationsansatz

$$u(s,t) = T(t)\, R(s)$$

Damit in DGL für alle t, s

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \frac{R''(s) + \frac{1}{s} R'(s)}{R(s)}$$

$$\equiv \text{const} := -\lambda c^2$$

Damit

$$\ddot{T} + \lambda c^2 T = 0, \quad R'' + \frac{1}{s} R' + \lambda R = 0$$

(5) Setze $y(s\sqrt{\lambda}) := R(s)$. Dies liefert

$$y''(s\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{s\sqrt{\lambda}} y'(s\sqrt{\lambda}) + y(s\sqrt{\lambda}) = 0$$

$x = s\sqrt{\lambda}$, Mult mit x^2

$\Longrightarrow$

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

gewöhnliche DGL, die s.g. Bessel-DGL 0-ter Ordnung

Fundamentalsystem durch

$$J_0(x), \quad Y_0(x)$$

(Besselfunktionen 0-ter Ordnung erster bzw 2ter Art)

$\longrightarrow$ Literatur, Buch Bärwolff

180517 [redacted]

Lösungen der 3-d Wellengleichung in Kugelkoordinaten, welche unabhängig von φ und ϑ sind:

$$u_{tt} = c^2 \left[u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right] \quad \Big| \cdot r$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial^2 (u \cdot r)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (u \cdot r)}{\partial r^2},$$

d.h. $w(r,t) := r\, u(r,t)$ erfüllt

$$w_{tt} = c^2 w_{rr} \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty)$$

Damit

$$w(r,t) = \overbrace{\cancel{\varphi(r+ct)}}^{\text{nach links}} + \overbrace{\chi(r-ct)}^{\text{nach rechts}}$$

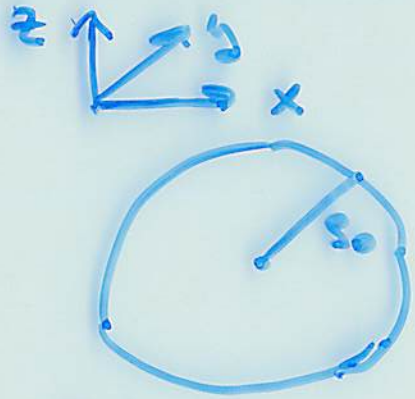
mit Funktion φ, χ

(1) Damit

$$u(r,t) = \frac{1}{r} \chi(r-ct)$$

mit r abklingende Welle

Kreisförmige Membran mit Radius s_0



Lösungen in Zylinderkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} u(s,\varphi,0) &= f(s,\varphi) \\ u_t(s,\varphi,0) &= g(s,\varphi) \end{aligned}\right\} \text{ AWe}$$

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \frac{1}{s}(s u_s)_s + \frac{1}{s^2} u_{\varphi\varphi}$$

$u(s_0,\varphi,t) = 0$ Randbedingung.

180517 [redacted]

und Kompatibilität

$$f(\rho_0,\varphi) - g(\rho_0,\varphi) = 0$$

$$\varphi \in [0,2\pi].$$

<u>Ansatz</u>: $u(\rho,\varphi,t) = T(t)\, w(\rho,\varphi)$

Damit in DGL. Dann ergibt sich

$$\ddot{T} + \lambda c^2 T = 0$$

$$\rightarrow T(t) = A\cos(c\sqrt{\lambda}\, t) + B\sin(c\sqrt{\lambda}\, t)$$

Ferner erfüllt w

$$\frac{1}{\rho}(\rho w_\rho)_\rho + \frac{1}{\rho^2} w_{\varphi\varphi} + \lambda w = 0$$

$$0 < \rho < \rho_0$$

$$w(\rho_0,\varphi) = 0 \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

(2) und $w(\rho, \varphi + 2k\pi) = w(\rho,\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$0 < \rho < \rho_0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Ansatz für w: $w(\rho,\varphi) = R(\rho)\, F(\varphi)$

mit $\alpha > 0$

$$\Longrightarrow \quad F''(\varphi) + \alpha F(\varphi) = 0,$$

$$F(\varphi + 2k\pi) = F(\varphi)$$

$$\rightarrow \quad \alpha = k^2$$

$$\rightarrow \quad F(\varphi) = a\cos(k\varphi) + b\sin(k\varphi)$$

Für R ergibt sich mit $R(\rho_0) = 0$

$$\frac{1}{\rho}(\rho R')' + \left(\lambda - \frac{k^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

Setze $y(\underbrace{\sqrt{\lambda}\,\rho}_{=:x}) = R(\rho)$

$$\Rightarrow \quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - k^2)\, y = 0$$

Bessel DGL mit Ordnung

180517 [redacted]

FS gegeben durch

J_n und Y_n (Bessel Funktionen)

n-ter Ordnung erster bzw 2ter Art)

$\rightarrow$ Bärwolff für weiteres Studium.

Weitere Hinweise

i) Lösungen der Wellengleichung durch sphärische Mittelung

$$(*)\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

③

$$M_r[u](x_0) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x,t)\, d\sigma(x)$$

ist sphärisches Mittel von u auf $\partial B_r(x_0)$.

<u>Satz</u>: Löst u $(*)$, so löst

$w(r,t) := r\, M_r[u](x_0)$ die eindimensionale Wellengleichung

$$w_{tt} = c^2 w_{rr}$$

<u>Satz</u> (nach Liouville): $(*)$ besitzt genau eine Lösung, welche gegeben ist durch

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t\, M_{ct}[g](x)\right) + t\, M_{ct}[h](x).$$