Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 6, 11. Mai 2017

Wellengleichung - Separationsansatz

Michael Hinze

Eindimensionale Wellengleichung

$$\left.\begin{array}{lll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = & 0 & \text{in } (0,\infty)\times(0,\ell) \\ \left.\begin{array}{ll} u(t,0) = 0 & \text{für } t\in(0,\infty) \\ u(t,\ell) = 0 & \text{für } t\in(0,\infty) \end{array}\right\} & \text{Randwerte} & \\ \left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \end{array}\right\} & \text{für } x\in(0,\ell) \end{array}\right\} & \text{Anfangswerte} & \end{array}\right\} \text{(ARWA)}$$

Ansatz für Lösung: $u(t,x) = T(t)\,X(x) \qquad \forall_{t,x}$

Wellengleichung liefert

$$X\ddot{T} = c^2 X'' T \qquad T = T(t)$$

$$X = X(x)$$

d.h. $$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} \qquad \forall_{t,x}$$

Damit

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \underbrace{-\lambda c^2}_{\text{Konstante}} = c^2\frac{X''}{X} \qquad \text{mit } \lambda \geq 0$$

Wir erhalten gewöhnliche Differentialgleichungen für T und X:

$$\ddot{T} + \lambda c^2 T = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{und}$$

Randwerte liefern
$$\left.\begin{aligned} u(t,0) &= 0 = T(t)\,X(0) \\ u(t,\ell) &= 0 = T(t)\,X(\ell) \end{aligned}\right\} \forall t$$

$$\Longrightarrow \quad X(0) = 0\,, \quad X(\ell) = 0$$

D.h. wir erhalten für X die Eigenwertaufgabe

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{in } (0,\ell)$$
$$X(0) = X(\ell) = 0$$

Lösungen: ∞-viele $\quad X_k(x) = c_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, x \quad$ mit $\lambda_k := \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}$

Ferner erhalten wir

$$T_k(t) = A_k \cos(c\sqrt{\lambda_k}\, t) + B_k \sin(c\sqrt{\lambda_k}\, t) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

erfüllt $\ddot{T} + \lambda_k c^2 T = 0$

Damit

$u_k(t,x) := T_k(t)\, X_k(x)$. Setze $a_k := A_k c_k$, $b_k = B_k c_k$

Wir erhalten, dass

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(c\sqrt{\lambda_k}\,t\right) + b_k \sin\left(c\sqrt{\lambda_k}\,t\right) \right] \sin\sqrt{\lambda_k}\,x$$

eine Lösung der Wellengleichung ist, welche die Randbedingungen erfüllt.
Summe bis ∞, daher Argument zunächst nur formal

Einbauen der AWe:

$$u(0,x) = f(x) \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,x$$

$$u_t(0,x) = g(x) \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c\, b_k \sqrt{\lambda_k}\, \sin\sqrt{\lambda_k}\,x$$

Setze f und g ungerade über die Intervallenden 0 und l ungerade fort. Dann enthalten die Fourierreihen nur Sinus-Terme!

Setze also

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\sqrt{\lambda_k}\,x \, dx$$

und

$$c\, b_k \sqrt{\lambda_k} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x) \sin\sqrt{\lambda_k}\,x \, dx$$

Damit löst

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(c\sqrt{\lambda_k}\,t\right) + b_k \sin\left(c\sqrt{\lambda_k}\,t\right) \right] \sin\sqrt{\lambda_k}\,x$$

formal unser ARWA (u_{tt} und u_{xx} existieren?)

Wir benötigen ein gewisses Abklingverhalten von a_k und b_k:

Die Bessel-Ungleichung liefert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leq \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} |f(x)|^2 \, dx \quad \Longrightarrow \quad a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c^2 b_k^2 \lambda_k \leq \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} |g(x)|^2 \, dx \quad \Longrightarrow \quad b_k \lambda_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Frage: Welche Eigenschaften müssen f und g erfüllen, damit u_{tt} und u_{xx} gebildet werden können

$u_{tt}(t,x)$, $u_{xx}(t,x)$ sind von der Form

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \lambda_k \cos\left(c\sqrt{\lambda_k}\, t\right) + b_k \lambda_k \sin\left(c\sqrt{\lambda_k}\, t\right)\right] \sin\sqrt{\lambda_k}\, x$$

Majorante ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k| + |b_k|\right) \underbrace{\lambda_k}_{\frac{\pi^2 k^2}{\ell^2}} \overset{!}{<} \infty$$

Hinreichend dafür

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |b_k| < \infty$$

Verlange $|a_k| \sim k^{-3-\varepsilon}$, $|b_k| \sim k^{-3-\varepsilon}$ $\quad \varepsilon > 0$ $\quad$ (weil $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} < \infty$)

Es gilt: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, x$, $\quad g(x) = c \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} \sin\sqrt{\lambda_k}\, x$

Γ Sei f stetig diffbar. Dann

$$a_k(f') = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f'(x) \cos\sqrt{\lambda_k}\, x \, dx \overset{\text{p. Intgr.}}{=} -\frac{2}{\ell}\sqrt{\lambda_k} \int_0^\ell f(x) \sin\sqrt{\lambda_k}\, x \, dx$$

$$= -\sqrt{\lambda_k}\, a_k(f) = -\frac{\pi k}{\ell} a_k(f)$$

Fourierreihe von f' glm. konvergent $\Rightarrow$ $a_k(f') \xrightarrow{k\to\infty} 0$ $(k \to \infty)$ (Bessel Ungl. !),

d.h. $\quad k\, a_k(f) \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Analog: f n-mal diffbar. Dann $a_k(f^{(n)}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$, also

$$k^n a_k(f) \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

Hinreichend bei uns $\quad f$ 2mal stetig diffbar und $f^{(3)}$ stückw. stetig

Analoges Argument für g :

$$g(x) = c \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} \sin\sqrt{\lambda_k}\, x$$

Hinreichend hier: $\quad g$ 1mal stetig diffbar und f'' stck. stetig.

Seien f, g ungerade auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt (über Intervallenden hinaus)