Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 4, 27. April 2017

Skalare Erhaltungsgleichungen, Wellengleichung

Michael Hinze

Betrachte

$$(P)\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Cauchy Problem für skalare Erhaltungsgleichung

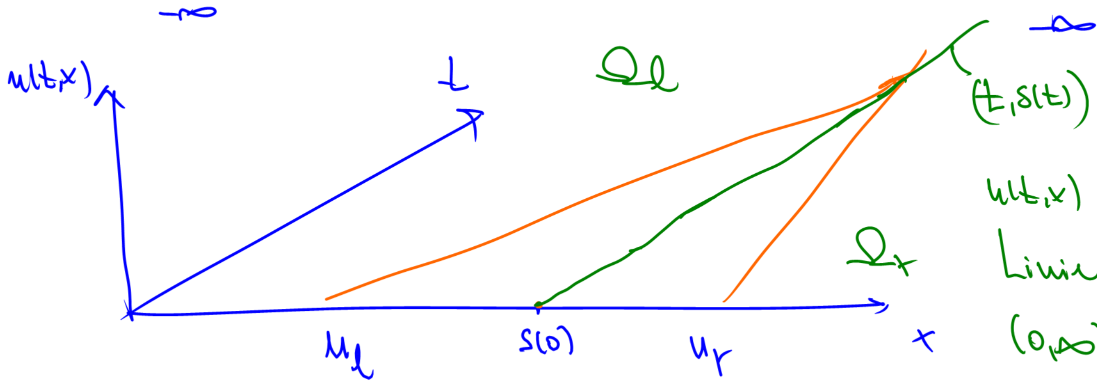
$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x\le 0 \\ 1-x & 0<x<1 \\ 0 & x\ge 1 \end{cases} \quad \text{oder} \quad u_0(x) = \begin{cases} u_l & x\le s(0) \\ u_r & x > s(0) \end{cases}$$

Diese Anfangswerte motivieren den schwachen Lösungsbegriff, siehe Tafel

$u\in L^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$ schwache Lösung von (P) $:\Longleftrightarrow$

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty u(t,x)\,v_t(t,x) + f(u(t,x))\,v_x(t,x)\,dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\,v(0,x)\,dx = 0$$

$\forall v\in C_0^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$



$u(t,x)$ unstetig entlang dieser Linie und Linie separiert $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ in $\overline{\Omega}_l\cup\overline{\Omega}_r$

Frage: ist

$$u(t,x) = \begin{cases} u_l & (t,x)\in\Omega_l \quad (x\le s(t)) \\ u_r & (t,x)\in\Omega_r \quad (x>s(t)) \end{cases}$$

schwache Lösung?

Satz (Rankine–Hugoniot Bedingung)

$$u(t,x) = \begin{cases} u_\ell & \text{in } \Omega_\ell \\ u_r & \text{in } \Omega_r \end{cases} \qquad \text{mit} \quad u_\ell \in C^1(\bar{\Omega}_\ell), \quad u_r \in C^1(\bar{\Omega}_r)$$

ist schwache Lösung genau dann wenn

u_ℓ und u_r sind klassische Lösungen in Ω_ℓ bzw Ω_r

und

$$\underbrace{[u_\ell(t,s(t)) - u_r(t,s(t))]\,\dot{s}(t) = f(u_\ell(t,s(t))) - f(u_r(t,s(t))) \quad \forall t>0}_{\text{Rankine–Hugoniot Bedingung}}$$

Erläuterung siehe Tafel

Leider: schwache Lösungen müssen nicht eindeutig sein

$\rightsquigarrow$ Konzept der Viskositätslösung:

u_ε eind. Lösung von
$$u_t + h(u)_x - \varepsilon u_{xx} = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}$$
$$u(0,x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dann u_ε diffbar $\forall t>0$ und $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t,x) =: u(t,x)$ für fast alle $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$

u eindeutig bestimmt und ist schwache Lösung, die s.g. Viskositätslösung.

Die wollen wir haben!

Diskussion S 30–46 Skript Gasser

Wellengleichung

$$u_{tt}(t,x) - c^2 u_{xx}(t,x) = 0 \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$$

$$u(0,x) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$u_t(0,x) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

für Wellenausbreitung mit Geschwindigkeit $c > 0$

Lösung: $u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) - f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)\,dz \right]$

nach d'Alembert