Partielle Differentialgleichungen
TUHH
VL 3, 20. April 2017

Burgers Gleichung

Michael Hinze

Burgers Gleichung (quasilinear erster Ordnung)

$$u_t(t,x) + u(t,x)\,u_x(t,x) = 0 \quad \text{in} \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}$$

$$a_1(t,x,u)\,u_t + a_2(t,x,u)\,u_x = 0 \qquad \text{d.h.} \quad b(t,x,u) \equiv 0$$

Beschreibung der Lösung mit Hilfe der Charakteristiken Methode

Erweitertes System

$$\left.\begin{aligned} \dot t &= 1 &&\rightarrow && t = \tau + \Xi \\ \dot x &= u &&\Rightarrow && x(t) \\ \dot u &= 0 &&\longrightarrow && u \equiv D \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{oE} \quad t \equiv \tau \\ \rightarrow\ & x - ut = C \end{aligned}$$

Damit $\phi(x - tu, u) = 0$ implizite Darstellung für Lösungen u, wobei $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ beliebig

FA: $u(t,x) = \varphi(x - tu)$, d.h. $\phi(x-tu, u) = 0$ ist nach u auflösbar.

Ist z.Bsp $u(0,x) = u_0(x)$ (Anfangswerte für u zur Zeit $t=0$), so gilt $u(0,x) = \varphi(x) = u_0(x)$, also $u(t,x) = u_0(x - tu)$.

Frage: $u = u_0(x - tu)$ nach u also Funktion von t und x auflösbar?

Betrachte $F(t,x,u) := u - u_0(x-tu) \overset{!}{=} 0$

Gilt $F_u \neq 0$, so ist diese Gleichung nach u auflösbar (Satz über impl. Fkt.)

Es gilt
$$F_u = 1 + u_0'(x-tu)\,t$$

Ist z.Bsp. u_0' beschränkt, d.h. $|u_0'(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dann ist für t klein genug sicher $F_u \neq 0$ und die Gleichung ist nach u auflösbar!

Das Cauchy-Problem für quasilineare PDGLen erster Ordnung lautet:

Finde $u = u(t,x)$ mit $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ mit

$$\left.\begin{aligned} u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,u)\,u_{x_i} &= b(t,x,u) && (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= u_0(x) && x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}\right\} (*)$$

Dabei ist die Anfangsbedingung u_0 gegeben

Charakt. System
$$\left.\begin{aligned} \dot t &= 1 & t(0) &= 0 \\ \dot x &= a(t,x,u) & x(0) &= x \\ \dot u &= b(t,x,u) & u(0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\}$$
ODE-System, mit dessen Lösungen die Lösungen von $(*)$ bestimmt sind.

Bsp Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_t + a \cdot \nabla_x u &= 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

$a \in \mathbb{R}^n$ gegebener Vektor

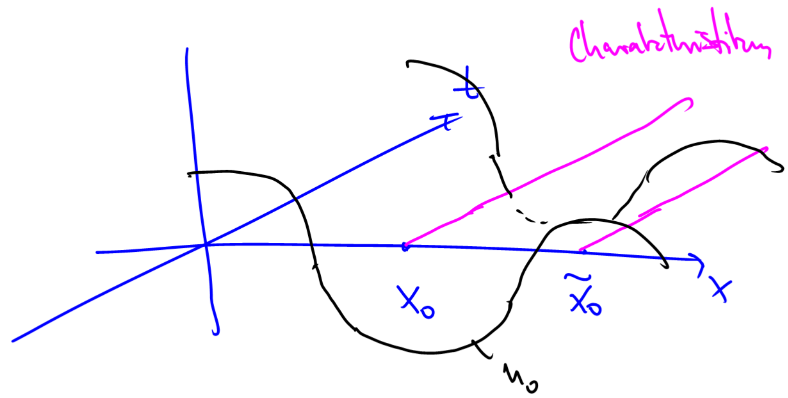
Char. Gleichung $\dot{t} = 1$ $\quad \Rightarrow \quad t = s$

$\dot{x} = a$

$\Longrightarrow \quad x(t) = x_0 + ta \quad$ mit $\quad x(0) = x_0$

D.h. Charakteristiken sind parallele Geraden in Richtung a durch x_0 bei $t=0$

$x = x_0 + ta$, also $x_0 = x - ta$



$u(t, x_0 + ta)$ konstant $\forall t$

$u(t,x) = u(t, x_0 + ta) = u_0(x_0)$

$= u_0(x - ta)$ Lösung.

Lösung transportiert u_0 in Richtung a

<u>Bsp</u> $\quad u_t + t x u_x = 0 \quad , \quad u(0,x) = u_0(x) = \sin x$

$\dot{t} = 1 \quad , \quad \dot{x} = tx \quad \longrightarrow \quad x(t) = c_1 \, e^{t^2/2} \quad , \quad x(0) = x_0$

$x(t) = x_0 \, e^{t^2/2} \quad$ bzw $\quad x_0 = e^{-t^2/2} x \qquad c_1 = x_0$

$\Longrightarrow \quad u(t,x) = \sin(x \, e^{-t^2/2})$

Zurück zur Burgers Gleichung $\quad u_t + u u_x = 0 \quad$ in $(0,\infty) \times \mathbb{R}$

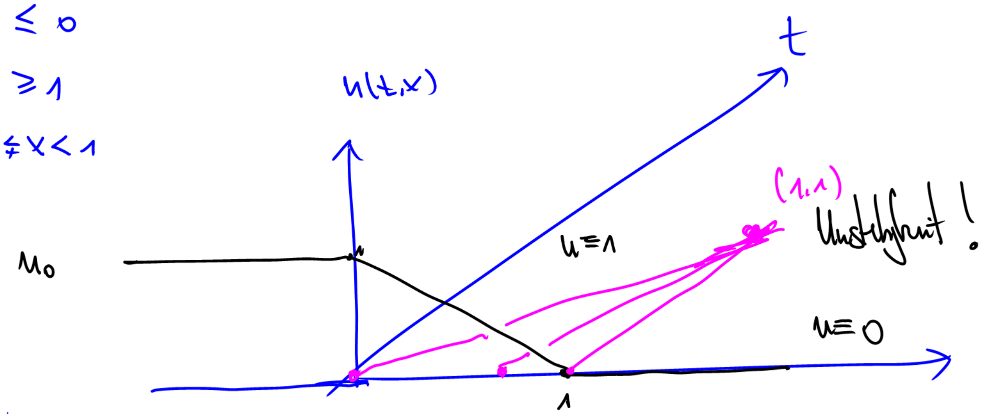
$u(0,x) = u_0(x)$

Char. System: $\quad \dot{t} = 1, \quad \dot{x} = u(t, x(t)) = u_0(x_0), \quad$ falls $\quad x(0) = x_0$

$\Longrightarrow \quad x(t) = x_0 + t\, u_0(x_0) \quad$ und $\quad u(t,x) = u_0(x - t\,u(t,x))$ implizite Darstellung

Wichtig: u konstant entlang der Geraden $x_0 + t\,u_0(x_0)$

Sei $u_0(x) := \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 1 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$



Stoßwelle

Verdünnungswelle $\leadsto$ Tafel

Ergo: Klassische Lösung $u \in C^1((0,\infty)\times\mathbb{R})$ wird nicht existieren zu diesen Anfangswerten! Lokal in der Zeit (nämlich für alle $t<1$) gibt es klassische Lösung (falls $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$)

Ausweg: anderer Lösungsbegriff $\leadsto$ direkt für skalare Erhaltungsgleichungen

$$(S) \qquad \begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

$f(u)_x = f'(u)\,u_x$

Burgers Gleichung für $f(u) = \frac{1}{2}u^2$

IdR hat (S) keine globalen klassischen Lösungen, siehe Diskussion Burgers Gleichung

Schwache Lösungen von S: Mult von $u_t - f(u)_x = 0$ mit v und Integration über $(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(u_t(t,x) + f(u(t,x))_x\right) v(t,x)\,dx\,dt = 0 \qquad (*)$$

Integral existiert für $u_t + f(u)_x$ stetig: Wähle $v \in C_0^1((0,\infty)\times\mathbb{R})$, wobei $C_0^1((0,\infty)\times\mathbb{R}) = \{ v : (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},$ $v \in C^1((0,\infty)\times\mathbb{R}),$ $\overline{\operatorname{supp} v}$ kompakt in $(0,\infty)\times\mathbb{R}\}$

mit $\operatorname{supp} v := \{(t,x);\ v(t,x) \neq 0\}$ (verallgemeinern auf $v \in C_0^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$)

Partielle Integration in (*) liefert

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty - u\, v_t \,dx\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} u(\infty,x)\overbrace{v(\infty,x)}^{=0} - \underbrace{u(0,x)}_{u_0(x)} v(0,x)\,dx$$

$$- \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)\, v_x \,dx\,dt + \underbrace{\int_0^\infty f(u)\, v\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} dt}_{\equiv 0}$$