4.3 Die Greensche Funktion

Definition:

1) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Dirichlet–Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).

2) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Neumann–Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).
Hierbei bezeichnet n die äußere Normale an ∂U.

Proposition:

Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in U$ die Beziehung

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) \;=\; & \int\limits_{\partial U} \Big(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \underbrace{\overbrace{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})}^{g}}_{?} - \underbrace{\overbrace{u(y)}^{?}}_{g} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Big) dS(\mathbf{y}) \\
& - \int\limits_{U} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \underbrace{\overbrace{\Delta u(\mathbf{y})}^{=f}}_{=f} d\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

Dirichlet Problem

Neumann Problem

Es bleibt ein Fragezeichen!

Die Funktion Φ bezeichnet dabei wieder die Fundamentallösung der Laplacegleichung.

Beweis: Greensche Formeln aus Analysis III.

Anwendung auf Randwertprobleme der Laplace– und Poissongleichung:

Wir können im Prinzip die Lösung an jedem Punkt berechnen, aber benötigen dazu Randdaten sowohl für u als auch die Ableitung $\partial u / \partial \mathbf{n}$.

Definition:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet–Problems

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x = 0 & \text{in } U \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Dann ist die **Greensche Funktion** auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in U,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

Satz:

Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet–Problems der Poissongleichung. Dann läßt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = -\int\limits_{\partial U} g(\mathbf{y})\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) + \int\limits_{U} f(\mathbf{y})G(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen.

Beweis:

Nach obiger Proposition hatten wir die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_{\partial U} (\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}))dS(\mathbf{y}) - \int\limits_{U} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

Das Problem dabei war, dass uns beim Dirichlet–Problem die Randdaten von $\partial u/\partial \mathbf{n}$ nicht bekannt sind.

Nach den Greenschen Formeln gilt aber

2x partiell integrieren und $\Delta \Phi^x = 0$

$$-\int\limits_{U} \Phi^x(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int\limits_{\partial U} u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - \Phi^x(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})$$

und daher

$$\int\limits_{\partial U} \Phi^x(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) = \int\limits_{U} \Phi^x(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial U} u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})$$

Aus der Randbedingung $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ folgt

$$\int\limits_{\partial U} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) = \int\limits_{U} \Phi^x(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int\limits_{\partial U} u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y})$$

Wir erhalten damit unter Ausnutzung der obigen Proposition:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int\limits_{\partial U} u(\mathbf{y})\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^x(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\right)}_{-\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}}} dS(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int\limits_{U} \underbrace{\left(\Phi^x(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right)}_{-G(\mathbf{x},\mathbf{y})} \Delta u(\mathbf{y})d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Analoges Argument für Lösungsdarstellung des Neumann Problems.

Eigenschaften der Greenschen Funktion

1) die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$,

2) $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \partial U,\ \mathbf{x} \in U,$$

3) die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt,

4) die Greensche Funktion ist symmetrisch, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Beispiele:

1) die Greensche Funktion für den Halbraum

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \,:\, x_n > 0\},$$

2) die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0, 1)$.

Die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$:

Allgemein ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y})$$

Dabei ist $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ die Fundamentallösung und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x & = & 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \Phi^x & = & \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)^T \,:\, x_n = 0\} \end{cases}$$

Für einen Punkt $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ definieren wir die Reflektion an der Ebene $\partial\mathbb{R}^n_+$ mittels

$$\tilde{x} = (x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1-x_1,\ldots,y_{n-1}-x_{n-1},y_n+x_n) \quad (x,y \in \mathbb{R}^n_+)$$

Dann ist $\Phi^x(\mathbf{y})$ harmonisch auf dem **ganzem** Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ und auf dem Rand gilt:

$$\begin{aligned}\Phi^x(\mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \ldots, y_{n-1} - x_{n-1}, x_n) \\ &= \Phi(y_1 - x_1, \ldots, y_{n-1} - x_{n-1}, -x_n) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\end{aligned}$$

da die Fundamentallösung nur von $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$ abhängt.
Also löst die Funktion $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \, : \, y_n = 0\} \end{cases}$$

und die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ lautet

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n - x_n}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}|^n}\right]\end{aligned}$$

und damit gilt für $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}$$

Definition:

Die Funktion

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+)$$

nennt man auch den Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Satz: (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \, : \, x_n = 0\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dy = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist, Man kann weiter zeigen, dass die Lösung sogar **unendlich oft differenzierbar** ist.

Die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0,1)$:

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, bezeichnet der Punkt

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

den **dualen Punkt** von $\mathbf{x}$ bezüglich $\partial B(0,1)$.

Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x & = & 0 & \text{in } B^0(0,1) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \quad |\mathbf{x}| < 1\} \\ \Phi^x & = & \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) & \text{auf } \partial B(0,1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}))$$

und wir erhalten folgende Greensche Funktion für die Einheitskugel:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})) \quad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in B(0,1), \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

Satz: (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \, : \, |\mathbf{x}| < 1\} \\ u &= g \quad \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \, : \, |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int\limits_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y})$$

Der **Poissonkern** für die Einheitskugel lautet demnach

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \quad (|\mathbf{x}| < 1, |\mathbf{y}| = 1)$$

Bemerkung:

Mit Hilfe der Transformation $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$ kann man leicht eine Darstellung für die Kugel $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \, : \, |\mathbf{x}| < r\}$ ableiten.