Fachbereich Mathematik **WiSe 2017/2018**

Prof. Dr. M. Hinze

Klausur Differentialgleichungen II

5. März 2018

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,t) = v(x)w(t)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$u_t - 5u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < \frac{1}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x,0) = 3 \cdot \sin(2\pi x) + 5 \cdot \sin(4\pi x), \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$u(0,t) = u(\frac{1}{2},t) = 0, \qquad t \geq 0.$$

b) Bestimmen Sie eine rotationssymmetrische Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta\, u(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}, \qquad 1 < x^2 + y^2 < 4,$$

$$u(x,y) = \frac{1}{4}, \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 1,$$

$$u(x,y) = 3, \qquad \text{für } x^2 + y^2 = 4.$$

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Ein Produktansatz der Form $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ liefert die RWA

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda,\ v(0) = v(\tfrac{1}{2}) = 0$$

Wegen $v(0) = v(\frac{1}{2}) = 0$ erhält man nur für $\boxed{\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\frac{1}{2}}\right)^2 = (2k\pi)^2}$ nichttriviale Lösungen, und zwar: $v_k(x) = \sin(2k\pi x)$.

Die Differentialgleichung für w_k lautet somit:

$w_k'(t) = -5\lambda_k \cdot w_k(t) \iff$

mit den Lösungen $w_k(t) = a_k \exp(-5 \cdot 4k^2\pi^2 t)$.

Wir erhalten also

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-20k^2\pi^2 t} \sin(2k\pi x)}$$ **(2 Punkte)**

Zu erfüllen ist noch die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2k\pi x) \stackrel{!}{=} 3 \cdot \sin(2\pi x) + 5 \cdot \sin(4\pi x)\ .$$ **(1 Punkt)**

Koeffizientenvergleich ergibt $\boxed{a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_k = 0\ \forall k \geq 3\,.}$ **(1 Punkt)**

und

$$\boxed{u(x,t) = 3e^{-20\pi^2 t} \sin(2\pi x) + 5e^{-80\pi^2 t} \sin(4\pi x)}$$

b) Übergang zu Polarkoordinaten $v(r,\phi) = u(x(r,\phi), y(r,\phi))$ liefert für eine rotationssymmetrische Lösung

$$r^2\, v_{rr} + r\, v_r = \frac{1}{r^2}, \qquad 1 < r < 2,$$
$$v(1,\phi) = \frac{1}{4}, \qquad \forall\, \phi \in [0, 2\pi],$$
$$v(2,\phi) = 3, \qquad \forall\, \phi \in [0, 2\pi].$$

Für $w = v_r$ erhält man

$r^2\, w_r + r\, w = \dfrac{1}{r^2}$ oder $w' + \frac{1}{r}\, w = \dfrac{1}{r^4}$. **(1 Punkt)**

Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung

$$\frac{dw_h}{dr} = -\tfrac{1}{r}\, w_h \Longrightarrow \frac{dw_h}{w_h} = -\tfrac{dr}{r}$$

$\Longrightarrow \ln(|w_h|) = -\ln(r) + \tilde{c} \Longrightarrow w_h = \frac{C}{r}$. **(1 Punkt)**

Einsetzen des Ansatzes $w_p = \frac{C(r)}{r}$ in die Differentialgleichung ergibt:

$\frac{C'(r)}{r} = \dfrac{1}{r^4} \Longrightarrow C'(r) = r^{-3} \Longleftarrow C(r) = \frac{r^{-2}}{-2}$ **(1 Punkt)**

Damit erhalten wir $w_p = \frac{-1}{2r^3}$ und

$v_r(r,\phi) = w(r) = \frac{C}{r} - \frac{1}{2r^3} \Longrightarrow v(r,\phi) = C\, \ln(r) + \frac{1}{4r^2} + D$. **(1 Punkt)**

Randbedingungen:

$$v(1,\phi) = C\, \ln(1) + \tfrac{1}{4} + D = \tfrac{1}{4} \Longrightarrow D = 0$$

$$v(2,\phi) = C\, \ln(2) + \tfrac{1}{16} = 3 \Longrightarrow C = \frac{3 - \frac{1}{16}}{\ln(2)}$$

Also

$v(r,\phi) = \dfrac{47\ln(r)}{16\ln(2)} + \dfrac{1}{4r^2}$. **(2 Punkte)**

Aufgabe 2)

a) Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t - t^2 u_x = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+\,,$$
$$u(x,0) = e^{-x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

b) Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < x \le 3 \\ 0 & 3 < x\,. \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie eine schwache Lösung für $t \in [0, \tilde{t}\,]$ mit einem hinreichend kleinem $\tilde{t}$.

(ii) Bis zu welchem t^* kann die Lösung aus i) maximal fortgesetzt werden?

(iii) Geben Sie eine schwache Lösung für $t > t^*$ an.

Lösung zur Aufgabe 2:

a) Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

$\frac{dx}{dt} = -t^2 \Longrightarrow x(t) = -\frac{t^3}{3} + C \Longrightarrow C = \frac{t^3}{3} + x$

$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u = D\,.$ **(2 Punkte)**

Anwendung des Satzes über implizite Funktionen, liefert die allgemeine Lösung:

$D = f(C) \Longrightarrow u(x,t) = f(\frac{t^3}{3} + x).$

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = f(0+x) \stackrel{!}{=} e^{-x} \Longrightarrow f(x) = e^{-x}\,.$

$u(x,t) = e^{-\frac{t^3}{3} - x}\,.$ **(2 Punkte)**

b) (i) An den zwei Sprungstellen der Anfangsdaten führen wir zwei Stoßwellen ein. Die Sprungbedingung verlangt:

$\dot{s}_1(t) = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ und $\dot{s}_2(t) = \dfrac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}\,.$

Wir erhalten die Stoßfronten

$s_1(t) = \frac{3}{4}\,t$ und $s_2(t) = 3 + \frac{1}{4}\,t\,.$

Für hinreichend kleine t ist

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \le \frac{3}{4}\,t \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\,t < x \le 3 + \frac{1}{4}\,t \\ 0 & 3 + \frac{1}{4}\,t < x\,. \end{cases} \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

eine schwache Lösung.

(ii) Für t^* mit
$\frac{3}{4}\,t^* = 3 + \frac{1}{4}\,t^* \iff t^* = 6$ **(1 Punkt)**
treffen die Stoßfronten aufeinander und die Lösung aus a) wird mehrdeutig.

(iii) Füt $t^* = 6$ gilt $s_1(t) = s_2(t) = \frac{9}{2}$ und

$$u(x,6) = \begin{cases} 1 & x \le \frac{9}{2}\,, \\ 0 & x > \frac{9}{2}\,. \end{cases}$$

Wir fügen die neue Stoßfront

$$s_3(t) = \frac{9}{2} + \dot{s}_3(t-6) = \frac{9}{2} + \frac{1+0}{2}\,(t-6)$$

ein und erhalten für $t > 6$

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \le \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\,(t-6), \\ 0 & x > \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\,(t-6). \end{cases}$$ **(2 Punkte)**

Aufgabe 3) [4 Punkte]

Sei $u(x,y)$ eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \qquad \text{in } \Omega :=]0,2[\times]0,1[\\ u(x,y) &= 3x^2 \qquad\qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie zutreffend ist. Begründen Sie Ihre Antworten.

- Es gilt $\max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} u(x,y) = 2$.
- Es gilt $\min_{(x,y)\in\bar{\Omega}} u(x,y) = 0$.
- $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2$ ist eine Lösung der Randwertaufgabe.

Lösung zur Aufgabe 3: (4 Punkte)

Die erste Aussage ist falsch, da zum Beispiel $u(1,y) = 3 > 2$ gilt.

Die zweite Aussage folgt aus dem Maximumprinzip .

$u(x,y) = 3x^2 - 3y^2$ ist zwar eine Lösung der Differentialgleichung , erfüllt aber nicht die Randbedingungen.