Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2017**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Sei $\Omega := [-1,1] \times [-1,1]$ und u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= -2 && \text{im Inneren von } \Omega, \\ u(x,y) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $v(x,y) = u(x,y) + \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ die Laplace-Gleichung im $\mathbb{R}^2$ löst.

b) Bestimmen den minimalen und den maximalen Wert von v in Ω.

c) Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für $u(0,0)$ an.

Bemerkung: Mit Hilfe der Methode aus Aufgabe 2 plus Superposition kann man v auch exakt berechnen. Das wäre allerdings für eine Übungsaufgabe zu aufwendig.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass die Fourier–Koeffizienten der ungerade und 2–periodisch fortgesetzten Funktion $g(y) = y^2 - y,\ 0 \le y \le 1$, gegeben sind durch

$$a_k = 0\,, \quad \beta_k = \begin{cases} 0 & \text{für k gerade,} \\ -\dfrac{8}{(k\pi)^3} & \text{für k ungerade.} \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes und unter Verwendung von a) die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} &\Delta u(x,y) = 0 && x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ &u(x,0) = 0 && x \in [0,1]\,, \\ &u(x,1) = 0 && x \in [0,1]\,, \\ &u(0,y) = g(y) = y^2 - y && y \in [0,1]\,, \\ &u(1,y) = 0 && y \in [0,1]\,. \end{aligned}$$

Abgabetermine: 26.6 -30.6.17