

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Gesucht sei eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta v(x, y) = 0$ in einem rotationssymmetrischen Gebiet, zum Beispiel in einem Kreisring. Das Gebiet lässt sich dann mittels Polarkoordinaten besser beschreiben. Man geht dafür über zu

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad \text{und}$$

$$v(x(r, \phi), y(r, \phi)) = u(r, \phi) .$$

Zeigen Sie, dass für $r \neq 0$ folgende Äquivalenz gilt:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0 \iff r^2 (v_{xx} + v_{yy}) = 0 .$$

- b) Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\Delta(u) = 0 \quad \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4,$$

$$u(x, y) = 1 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 1,$$

$$u(x, y) = 2 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 4.$$

Aufgabe 2: Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0, \quad \mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = y(x + y + z), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0 .$$

Abgabetermine: 12.6 -16.6.17 bzw. 26.6. - 30.6