Prof. Dr. M. Hinze, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Berechnen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= -4x, && x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) &= 1, && x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \cos(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätigen Sie die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis:

1) Berechnen Sie die Lösung u_h der Anfangswertaufgabe mit homogener Differentialgleichung mit Hilfe der Formel von d'Alembert (Vorlesung 5).
2) Berechnen Sie irgendeine partikuläre Lösung $\tilde{u}$ der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten $\tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0$. Machen Sie hierfür den Ansatz $\tilde{u}(x,t) = (ax^3 + bx^2 + \hat{c}x + d)(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)$.

Alternativ: Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\, \mathrm{d}\omega \mathrm{d}\tau$$

die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0\cdot$$

löst und berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel eine partikuläre Lösung.

3) Verwenden Sie das Superpositionsprinzip und überzeugen Sie sich davon, dass die Summe der Lösungen aus 1) und 2) das ursprüngliche Problem löst.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx} && x \in (0, \tfrac{1}{2}),\, t > 0, \\ u(x,0) &= 2x^2 - x && x \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ u_t(x,0) &= 3\sin(4\pi x) && x \in [0, \tfrac{1}{2}], \\ u(0,t) &= 0 && t \geq 0, \\ u(\tfrac{1}{2},t) &= 0 && t \geq 0. \end{aligned}$$

Bearbeitungstermine: 22.- 26.5.17