Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2017**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung für $u = u(x,t)$:

$$u_t + u^3 \cdot u_x = 0 \qquad t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe zu den Anfangsdaten

$$u(x,0) = \sqrt[3]{x} \qquad x \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) Sind die Charakteristiken Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Welche Lösung erhält man für die Anfangsdaten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \sqrt[3]{x} & 0 \le x \le 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Charakteristiken für einige x_0-Werte aus dem Intervall $[-1, 2]$.

Aufgabe 2:

Ein einfaches Verkehrsflussmodell:

Wir betrachten einen eindimensionalen Fluss von Fahrzeugen entlang einer unendlich langen, einspurigen Fahrbahn. In einem sogenannten makroskopischen Modell betrachtet man nicht einzelne Fahrzeuge, sondern den Gesamtfluss der Fahrzeuge. Dazu führen wir folgende Größen ein :

$u(x,t)$ = (Längen-)Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t)$ = Fluss = Anzahl Fahrzeuge, die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren $= u(x,t) \cdot v(x,t)$.

u_{max} = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

v_{max} = maximale Geschwindigkeit

Wir nehmen an, dass es keine Ein– bzw. Ausfahrten gibt, dass keine Fahrzeuge verschwinden, und dass keine neuen Fahrzeuge hinzukommen.

a) Sei $N(t, a, \Delta a) :=$ Anzahl Fahrzeuge auf einem Ortsintervall $[a, a+\Delta a]$ zum Zeitpunkt t. Machen Sie sich klar, dass dann einerseits

$$N(t, a, \Delta a) \;=\; \int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\,dx$$

gilt und andererseits

$$N(t, a, \Delta a) - N(t_0, a, \Delta a) \;=\; \int_{t_0}^{t} q(a,\tau) - q(a+\Delta a, \tau)d\tau\,.$$

Leiten Sie hieraus die sogenannte Erhaltungsgleichung (vgl. Vorlesung 1) für die Masse (Anzahl Fahrzeuge)

$$u_t + q_x = 0$$

her.

Tipps zum Vorgehen: Leiten Sie beide Formeln für N nach t ab, teilen Sie durch Δa und betrachten Sie den Grenzfall $\Delta a \to 0$.

b) Wir nehmen nun in einem einfachen Modell an, dass die Geschwindigkeit, wie folgt von der Dichte abhängt

$$v(x,t) \;=\; v_{max}\left(1 - \frac{u(x,t)}{u_{max}}\right)$$

(i) Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) auf.

(ii) Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.

(iii) Skizzieren Sie die Charakteristiken für

$$v_{max} = 1 \quad \text{(Hier ist geeignet skaliert worden!)}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = \frac{u_{max}}{2} & x\,<\,0 \\ u_r = u_{max} & x\,>\,0 \quad \text{(rote Ampel/ Stau etc.)} \end{cases}$$

Wie lautet hier die Rankine-Hugoniot-Bedingung (vgl. Vorlesung 4)? Welche schwache Lösung erhält man demnach?

Abgabetermine: 8. -12.5.17 bzw. 22. -26.5