

## 8.1 Die Methode der Finiten–Differenzen

Wir beschränken uns auf **eindimensionale** Probleme und die folgenden Anfangs– und Anfangsrandwertprobleme

1) Cauchy–Probleme für **skalare Erhaltungsgleichungen**, also

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

2) Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

3) Anfangsrandwertprobleme für die **Wärmeleitungsgleichung**, also

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

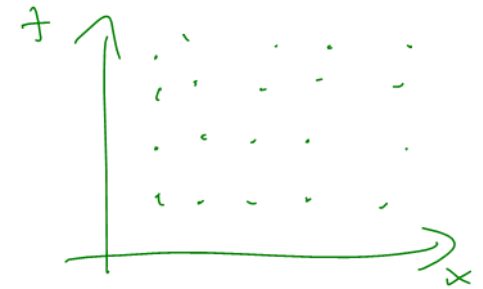
## Idee bei Finiten–Differenzen:

Approximiere die exakte Lösung **nur** an diskreten Punkten (**dem Gitter**):

$$u(x_i, t_j) \approx U(x_i, t_j) =: U_i^j$$

mit den diskreten Punkten

$$x_i := i \cdot h, \quad i \in \mathcal{Z}_x, \quad t_j := j \cdot k, \quad j \in \mathcal{Z}_t$$



und den **Orts– und Zeitschrittweiten**  $h$  und  $k$ . Die Indexmengen  $\mathcal{Z}_x$  und  $\mathcal{Z}_t$  sind dabei endliche oder unendliche Teilmengen von  $\mathcal{Z}$ .

**Beispiel:** Für die Wärmeleitungsgleichung auf  $[0, 1] \times [0, T]$  setzen wir

$$x_i := i \cdot h, \quad i = 0, \dots, n$$

$$t_j := j \cdot k, \quad j = 0, \dots, m$$

mit den Orts– und Zeitschrittweiten

$$h := \frac{1}{n}, \quad k := \frac{T}{m}$$

Zur Berechnung der diskreten Werte  $U_i^j$  benötigen wir die Approximation von Ableitungen:

**Beispiel:**

Wir approximieren die Ableitung  $u_x(x, t)$  an der Stelle  $(x, t) = (x_i, t_j)$ :

1) **Zentrale Differenzen**

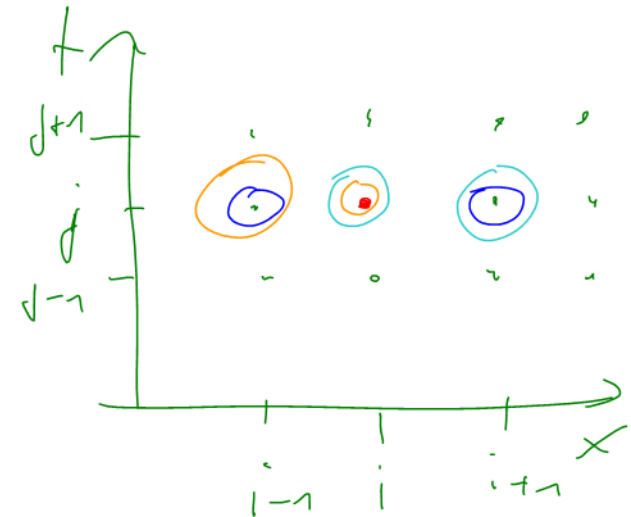
$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}$$

2) **Vorwärtsdifferenz**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}$$

3) **Rückwärtsdifferenz**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}$$



## Approximationsgüte von Finiten-Differenzen

Sei  $u(x, t)$  eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und  $(x_i, t_j)$  ein fester Punkt eines Gitters mit Orts- und Zeitschrittweite  $h$  und  $k$ .

Mittels einer Taylorentwicklung um  $(x_i, t_j)$  erhalten wir

$$\underbrace{u(x_{i+1}, t_j)}_{u_{i+1}^j} = \underbrace{u(x_i, t_j)}_{u_i^j} + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=h} + \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^3}_{=h^3} + \dots$$

$$\underbrace{u(x_{i-1}, t_j)}_{u_{i-1}^j} = \underbrace{u(x_i, t_j)}_{u_i^j} + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)}_{=-h} + \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^3}_{=-h^3} + \dots$$

Wir erhalten damit

1) bei **Zentralen Differenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h} \right| = O(h^2)$$

⇒ Approximation **zweiter** Ordnung in  $h$ .

2) bei **Vorwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

⇒ Approximation **erster** Ordnung in  $h$ .

3) bei **Rückwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

⇒ Approximation **erster** Ordnung in  $h$ .

# Finite-Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen

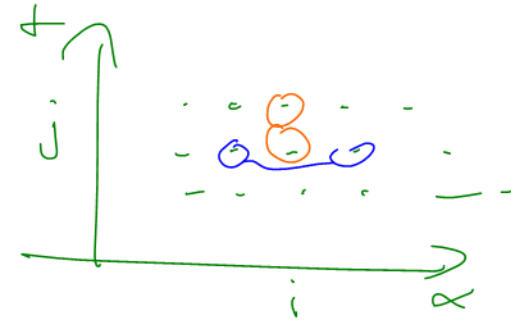
Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} \rightarrow \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$$\frac{f(u_{i+1}^j) - f(u_{i-1}^j)}{2h}$$

Mit den Notationen von oben ist ein numerisches Verfahren mit Hilfe von Finiten-Differenzen gegeben durch

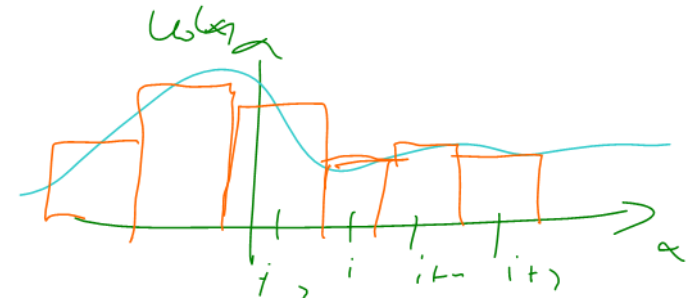
$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} (f(U_{i+1}^j) - f(U_{i-1}^j))$$



mit den Anfangsbedingungen

$f = 0$  Zeitlevel

$$U_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} u_0(x) dx$$



**Also:** Zentrale Differenz im Ort, Vorwärtsdifferenz in der Zeit.

**Beispiel:** Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ -1 & : x > 0 \end{cases}$$

Sprungkurve

Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für  $t > 0$  !

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} \left( \frac{(U_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(U_{i-1}^j)^2}{2} \right)$$

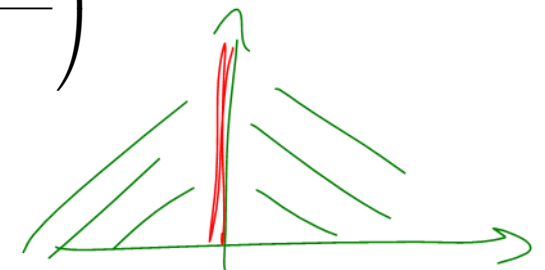
$$U_i^0 = \begin{cases} 1 & : i < 0 \\ 0 & : i = 0 \\ -1 & : i > 0 \end{cases}$$

$$u u_x = \left( \frac{u^2}{2} \right)'$$

$$f(u_1) = \frac{u^2}{2}$$

$$s = \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} =$$

$$= \frac{1}{2} (u_1 + u_2) = 0$$



**Fazit:** Funktioniert nicht, Verfahren ist **instabil**

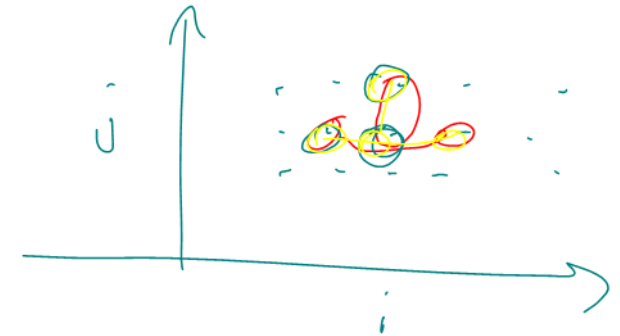
**Beispiel:** Wir betrachten die lineare Advektionsgleichung

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$f(u) = u$

Zentrale Differenzen im Ort:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)$$



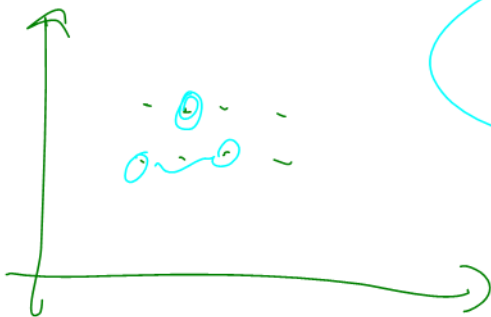
Funktioniert selbst bei einer linearen Gleichung nicht!

Upwind-Verfahren: funktioniert unter der CFL-Bedingung  $k/h < 1$

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{h} (U_i^j - U_{i-1}^j)$$

Lax-Friedrichs-Verfahren: funktioniert wie das Upwind-Verfahren

$$U_i^{j+1} = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j}{2} - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)$$



$\approx u_f$



Zentrale Diff.

$$\begin{pmatrix} u_{i-1}^{j+1} \\ u_i^{j+1} \\ u_{i+1}^{j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \begin{matrix} 1 & -\varrho \\ \varrho & 1 \end{matrix} & -\varrho \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ u_{i-1}^j \\ u_i^j \\ u_{i+1}^j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$A_2$

$A$

$(j+1)$  Zeitlevel

$j$  Zeitlevel

$$u^j = A u^{j-1} = A^2 u^{j-2} = \dots = A^j u^0$$

$$\det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\varrho \\ \varrho & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + \varrho^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i\varrho$$

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{1 + |\varrho|^2} > 1 \quad \text{!}$$

instabil

Upward

$$\begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1-2a & 2a \\ 1-2a & 2a \end{matrix}} & \begin{matrix} 2a \\ 2a \end{matrix} \\ A_L & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 1-2a$$

$$|\lambda_{1,2}| < 1 \quad \left( \text{falls } 0 < a < \frac{1}{2} \right)$$

## Finite-Differenzen für die Poissongleichung

Wir betrachten jetzt Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, \cancel{0 \leq x \leq 1} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Zunächst benötigen wir eine Approximation der zweiten Ableitung:

$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = \frac{\frac{U_{i+1} - U_i}{h} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h}}{h}$$

Damit erhalten wir die diskreten Gleichungen

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = F_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

mit  $h = 1/n$  und

$$F_i := f(x_i), \quad U_0 = U_n = 0$$

Setzen wir

$$\mathbf{x} = (U_1, \dots, U_{n-1})^T, \quad \mathbf{b} = (F_1, \dots, F_{n-1})^T$$

so erhalten wir das **lineare Gleichungssystem**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Fazit:**

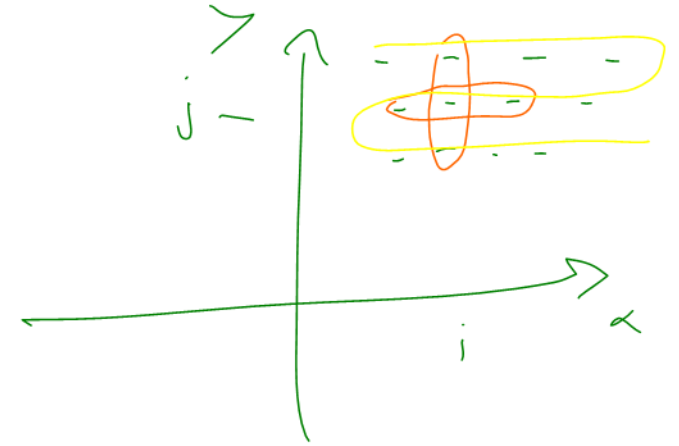
Die numerische Lösung der Poissongleichung reduziert sich auf ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten  $U_1, \dots, U_{n-1}$ .

$0/2$

$$u_{xx} + u_{yy} = f$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2h} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2h} = f(x_{i,j})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$



## Finite-Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Zur numerischen von Anfangsrandwertproblemen der Form

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

müssen wir Diskretisierungen für die zweite Ableitung  $u_{xx}$  mit einer Differenzenapproximation für die Zeitableitung  $u_t$  kombinieren:

1) Setzen wir eine Vorwärtsdifferenz an, also

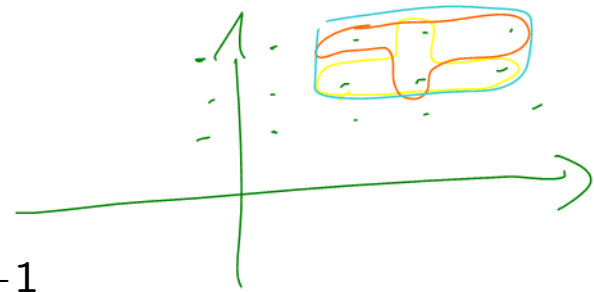
$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

so erhalten wir das **explizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)$$

2) Mit der Rückwärtsdifferenz

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{k}$$



erhalten wir das implizite Verfahren

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} (U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1})$$

**Fazit:** Zur Berechnung der Lösung zur Zeit  $t_{j+1}$  muß ein lineares Gleichungssystem gelöst werden!

3) Eine Konvexkombination beider Verfahren liefert die  $\theta$ -Methode

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} [\theta (U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) + (1 - \theta) (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)]$$

Im Fall  $\theta = \frac{1}{2}$  erhält man das Crank–Nicholson–Verfahren.

## Bemerkungen:

- 1) Das explizite Verfahren funktioniert nur unter der Bedingung:

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Man nennt diese Bedingung eine **Stabilitätsbedingung**.

Verdoppelt man also die Zahl der Gitterpunkte im Ort, muß man entsprechend mit einem vierfach kleineren Zeitschritt arbeiten.

- 2) Das implizite Verfahren ist für alle Werte von  $k$  und  $h$  stabil.

Zur Berechnung der Lösung muß man allerdings in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen.

- 3) Bei Verfahren sind erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Ort, d.h. für den Fehler  $e(T)$  zwischen der exakten und der numerischen Lösung zu einer festen Zeit  $T > 0$  gilt:

$$e(T) = O(k) + O(h^2)$$



**Bemerkungen:** (Fortsetzung)

4) Die Stabilitätsbedingung für die  $\theta$ -Methode für  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  lautet

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)^{-1}$$

Für  $\theta \geq \frac{1}{2}$  ist die  $\theta$ -Methode stets stabil.

5) Das Verfahren von Crank–Nicholson ist zweiter Ordnung in Ort **und** Zeit, d.h. es gilt

$$e(T) = O(k^2) + O(h^2)$$

Für keinen anderen Wert von  $\theta$  gilt ein entsprechendes Resultat.

Daher ist das Verfahren von Crank–Nicholson ein spezielles Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung und wird häufig bei numerischen Berechnungen verwendet.

## 8.1 Die Methode der Finiten–Elemente

Wir beschränken uns auf das **eindimensionale Randwertproblem**:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), & 0 < x < l, \quad k(x) > 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

FE–Methoden basieren auf drei grundlegenden Ideen:

- 1) Man reformuliert das gegebene Problem in einer **schwachen Form** oder auch **Variationsformulierung**. Dadurch reduziert sich das Problem auf unendlich viele algebraische Gleichungen in einem Vektorraum, dessen Elemente bereits die vorgegebenen Randwerte erfüllen.
- 2) Die **Galerkin Methode** reduziert das Problem auf Gleichungen in einem **endlich–dimensionalen** Finite–Element–Raum, der eine endliche Zahl von Basiselementen besitzt.

- 3) Als Basis des endlich-dimensionalen FE-Raums wählt man **stückweise Polynome** und erhält damit ein lineares Gleichungssystem mit einer **dünn besetzten** Koeffizientenmatrix.

### Die schwache Form des Randwertproblems

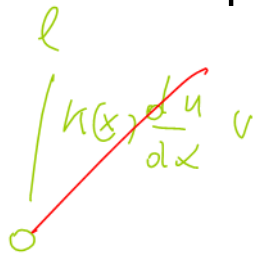
Sei  $V$  gegeben durch

$$V = \{v \in C^2[0, l] : v(0) = v(l) = 0\}$$

Wir multiplizieren nun die gegebene Poissongleichung mit einer Funktion  $v \in V$  und integrieren über den Ortsraum  $[0, l]$ :

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Mittels partieller Integration erhalten wir



$$+\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Da  $v \in V$  eine beliebige Funktion ist, lautet die schwache Form:

Finde ein  $u \in V$ , sodass die Beziehung

$$\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x)v(x) dx$$

für alle  $v \in V$  erfüllt ist.

**Man kann nun zeigen:**

Erfüllt  $u \in V$  die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x),$$

so erfüllt  $u$  auch die schwache Form von oben, und **wichtiger**, es gilt ebenfalls die **Umkehrung**.

**Fazit:** Beide Darstellungen sind also äquivalent.

## Die Galerkin–Methode

Definieren wir

$$a(u, v) := \int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx$$

so ist  $a(\cdot, \cdot)$  eine **symmetrische Bilinearform**, die ein inneres Produkt im Vektorraum  $V$  darstellt.

Mit Hilfe der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  und dem Skalarprodukt

$$(f, v) = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

läßt sich die schwache Form folgendermaßen schreiben:

finde ein  $u \in V$ , sodass  $a(u, v) = (f, v)$  für alle  $v \in V$  gilt

Die Idee der Galerkinmethode ist nun den Vektorraum  $V$  durch einen endlich-dimensionalen Raum  $V_n$ , den sogenannten **Finite-Element-Raum**, zu approximieren und dort folgendes Problem zu lösen:

finde ein  $v_n \in V_n$ , sodass  $a(v_n, v) = (f, v)$  für alle  $v \in V_n$  gilt

Dieses Problem läßt sich auf ein lineares Gleichungssystem reduzieren:

Sei  $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$  eine Basis von  $V_n$ . Dann besitzt die Lösung  $v_n$  die Darstellung

$$v_n = \sum_{j=1}^n u_j \Phi_j$$

Setzen wir dies in die schwache Form ein, so gilt:

$$a \left( \sum_{j=1}^n u_j \Phi_j, \Phi_i \right) = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Aufgrund der Bilinearität von  $a(\cdot, \cdot)$  folgt

$$\sum_{j=1}^n a(\Phi_j, \Phi_i) u_j = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Setzen wir für  $i = 1, \dots, n$

$$a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i), \quad f_i = (f, \Phi_i),$$

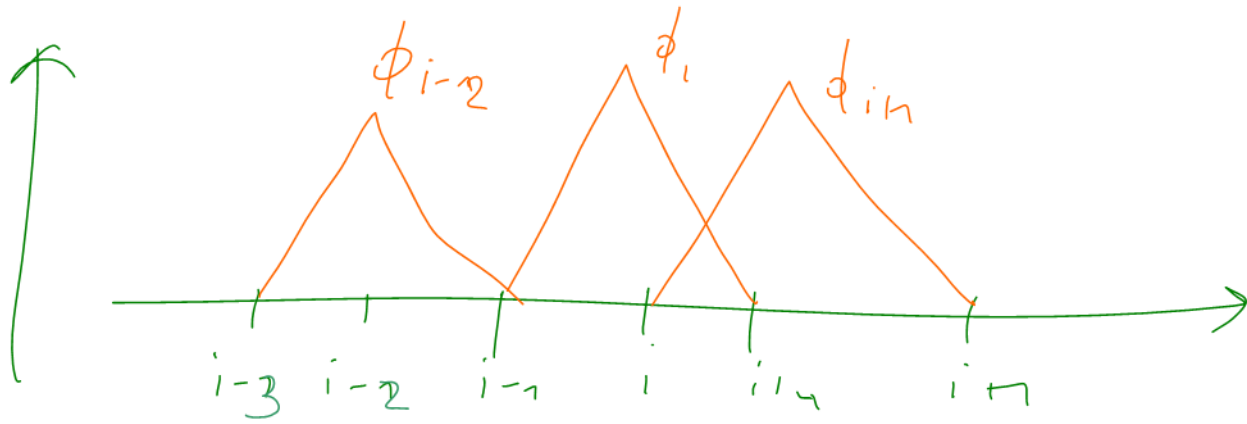
so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

mit der **Steifigkeitsmatrix**  $\mathbf{A}$  und dem Lösungsvektor

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten  $u_1, \dots, u_n$ .



$$-\Delta u = f$$

$$a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^l \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx$$

.....

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 2 & -1 \end{pmatrix}$$



## Approximation der stückweise Polynome

Zur Konstruktion von FE-Räumen machen wir folgende Vorüberlegungen:

- 1) Am besten wären FE-Räume  $V_n$ , für die man eine Orthogonalbasis aufstellen kann. Dann wäre die Steifigkeitsmatrix eine Diagonalmatrix. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich.
- 2) Findet man keine Orthogonalbasis, so sollten Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite **einfach** zu berechnen sein.
- 3) Die Basis von  $V_n$  sollte **fast** orthogonal sein, denn dann wäre die Steifigkeitsmatrix nahe bei einer Diagonalmatrix und damit **dünn besetzt**.
- 4) Die exakte Lösung  $u$  des Problems sollte **möglichst gut** durch ein Element aus  $V_n$  approximiert werden können und im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  sollte die Approximation **beliebig gut** werden.

**Daher:** Approximation durch stückweise Polynome, zum Beispiel durch eine stückweise **lineare** Funktion.