Kapitel 6: Die Wellengleichung

In diesem Kapitel untersuchen wir die **Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

sowie die **inhomogene Wellengleichung** der Form

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

in Verbindung mit geeigneten Anfangs– und Randbedingungen.

Hier bezeichnet $t > 0$ die Zeitvariable und $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.

Wir suchen also eine Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace–Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ wirkt.

Für die inhomogene Gleichung bezeichnet die rechte Seite eine gegebene Funktion $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

6.1 Die Formel von d'Alembert

Wir untersuchen zunächst eine **direkte** Methode zur Lösung des eindimenisonalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei g, h vorgegebene Anfangsbedingungen sind.

Beobachtung:

Die Differentialgleichung läßt auf folgende Weise faktorisieren: es gilt

$$(\partial_{tt} - \partial_{xx})u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Setzen wir nun

$$v(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$$

$v_t + v_x = 0$

$u_t - u_x = v$

so erhalten wir eine Transportgleichung mit kostanten Koeffizienten:

$$v_t(x,t) + \overset{1}{v_x}(x,t) = 0$$

$\dot{x}(t) = 1 \qquad x = t + x_0$

$\hat{v}(t) = v(x(t),t)$

$\dot{\hat{v}}(t) = v_t + \dot{x}(t) v_x = 0$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$v(x,t) = a(x-t)$$

$\Rightarrow v(x(t),t) = \hat{v}(t) = \hat{v}(0) = v(x(0),0) =$

$= v(x_0,0) = a(x_0)$

$= a(x-t)$

und erfüllt die Anfangsbedingung

$$v(x,0) = a(x)$$

a noch unbekannt

Wegen

$$v(x,t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$$

ist $u(x,t)$ demnach die Lösung der **inhomogenen** Transportgleichung

$$u_t \overset{-1}{-} u_x = a(x-t)$$

$\dot{x}(t) = -1 \qquad x = -t + x_0$

$u(x(t),t) = \hat{u}(t)$

$\boxed{\dot{\hat{u}}(t)} = u_t + \dot{x}(t) u_x = a(x-t) =$

$= a(x_0 - t - t) = \boxed{a(x_0 - 2t)}$ (*)

(*) $\boxed{u(x,t)} = u(x(t),t) = \hat{u}(t) =$

$= \hat{u}(0) + \int_0^t a(x_0 - 2s)\,ds =$

$= u(x_0,0) + \int_0^t a(x+t-2s)\,ds =$

$= g(x_0) + \int$

$= \boxed{g(x+t) + \int_0^t a(x+t-2s)\,ds}$

Nach den Methoden aus Kapitel 2 erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t a(x+(t-s)-s)ds + u(x+t,0) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + u(x+t,0) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + g(x+t) \end{aligned}$$

$x+t-2s=y$ $\quad s=0 \Rightarrow x+t$

$-2ds=dy$ $\quad s=t \Rightarrow x-t$

Diese Lösung soll nun noch die Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = h(x)$$

erfüllen.

Man berechnet

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}(a(x+t) + a(x-t)) + g'(x+t)$$

und damit

2te AB

$$u_t(x,0) = a(x) + g'(x) \overset{!}{=} h(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a(x) = h(x) - g'(x)}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \Big(h(y) - g'(y)\Big)\, dy + g(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} g(x+t) + \frac{1}{2} g(x-t) + g(x+t) \end{aligned}$$

Wir erhalten aus der Beziehung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t)$$

demnach

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$$

glättet nicht!

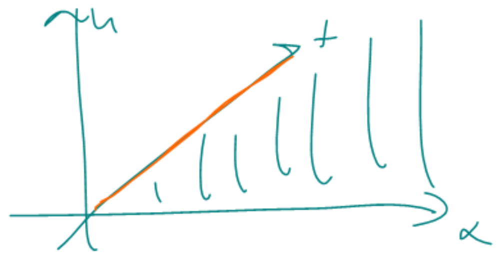
$g \in C^k \Rightarrow u \in C^k$

Diese Darstellung nennt man die **Formel von d'Alembert.**

Bemerkung:

Damit diese Lösung $u(x,t)$ tatsächlich eine **differenzierbare** Lösung der Wellengleichung ist, müssen wir bezüglich der Anfangsbedingungen fordern:

$$g \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R})$$



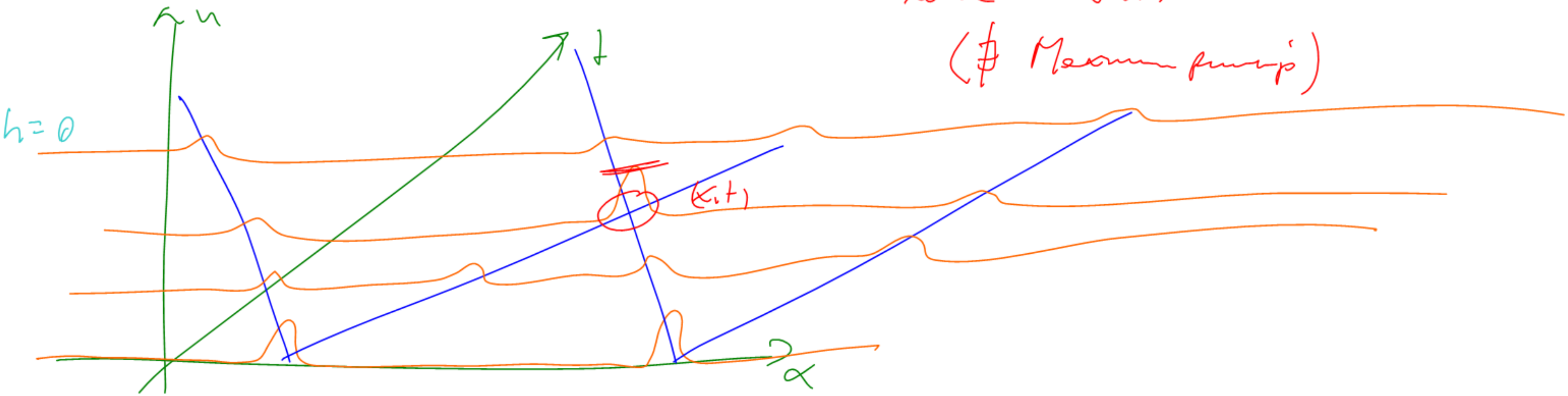
Beispiel zur Formel von d'Alembert:

Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = \sin x, u_t = \cos x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Nach der Formel von d'Alembert ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos(y)dy \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sin(x+t) - \sin(x-t)) \\ &= \sin(x+t) \end{aligned}$$

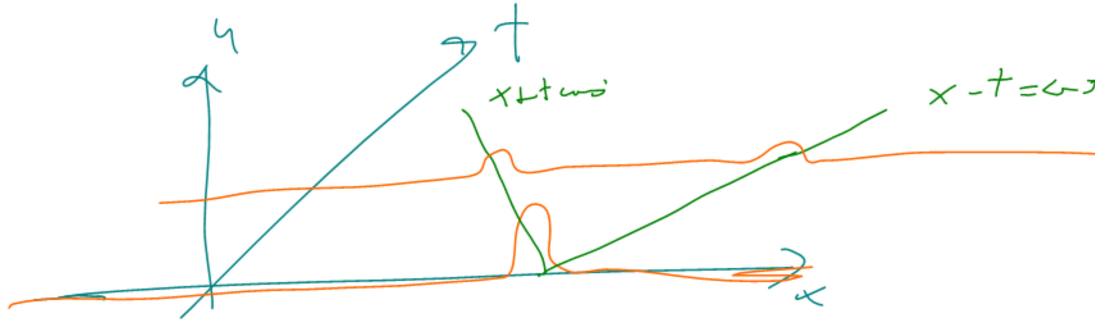


lokal in (x,t) ein Maximum

($\neq$ Maximumprinzip)

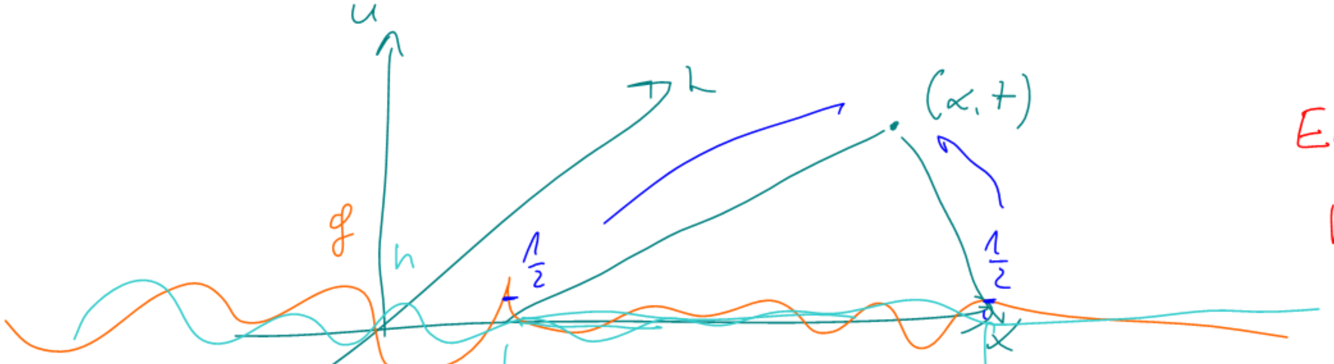
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy$$

Fall: $h \equiv 0$



i.A. $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$\Rightarrow \dots \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct)\right) + \dots$

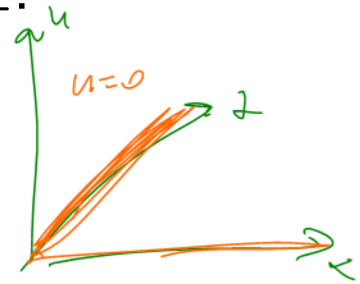


$$\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy$$

Einfluss auf (x,t) kommt nur aus $(x-t, x+t)$

Die Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$:

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+$:



$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

fest eingespannt

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

Idee:

Erweitere das Halbraumproblem auf ein Ganzraumproblem und verwende die Formel von d' Alembert.

Definiere eine Funktion $\tilde{u}(x, t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ durch

$$\tilde{u}(x, t) := \begin{cases} u(x, t) & (x \geq 0, t \geq 0) \\ -u(-x, t) & (x \leq 0, t \geq 0) \end{cases}$$

Analog werden die gegebenen Anfangsdaten **reflektiert**:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die Funktion $\tilde{u}$ das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g},\ \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und nach der Lösungsformel nach d'Alembert gilt

d'Alembert

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy$$

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{g}(t) + \underbrace{\tilde{g}(-t)}_{-\tilde{g}(t)}\Big) + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)\,dy}_{=0} = 0$$

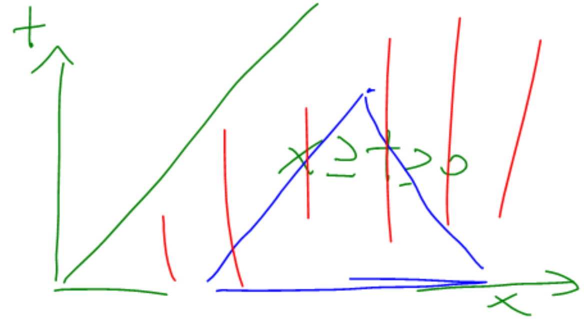
Randbedingung erfüllt!

$\tilde{u}$ ungerade?

$$\tilde{u}(-x,t) = \frac{1}{2}\Big(\overbrace{\tilde{g}(-x+t)}^{-\tilde{g}(x-t)} + \overbrace{\tilde{g}(-x-t)}^{-\tilde{g}(x+t)}\Big) + \frac{1}{2}\int_{-x-t = -(x+t)}^{-x+t = -(x-t)} \tilde{h}(y)\,dy = \dots = -\tilde{u}(x,t)$$

Für $x \geq 0$ haben wir gerade die Lösung des Ausgangsproblems, i.e.

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$$



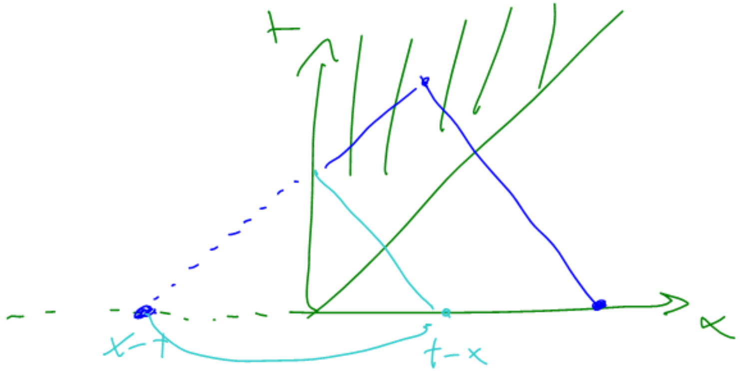
Fallunterscheidung:

1) Ist $x \geq t \geq 0$, so folgt $x - t \geq 0$ und daher

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(\tilde{g}(\underbrace{x+t}_{\geq 0}) + \tilde{g}(\underbrace{x-t}_{\geq 0})) + \frac{1}{2}\int\limits_{\underbrace{x-t}_{\geq 0}}^{x+t \,\geq 0} \tilde{h}(y)dy \\ &= \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy \end{aligned}$$

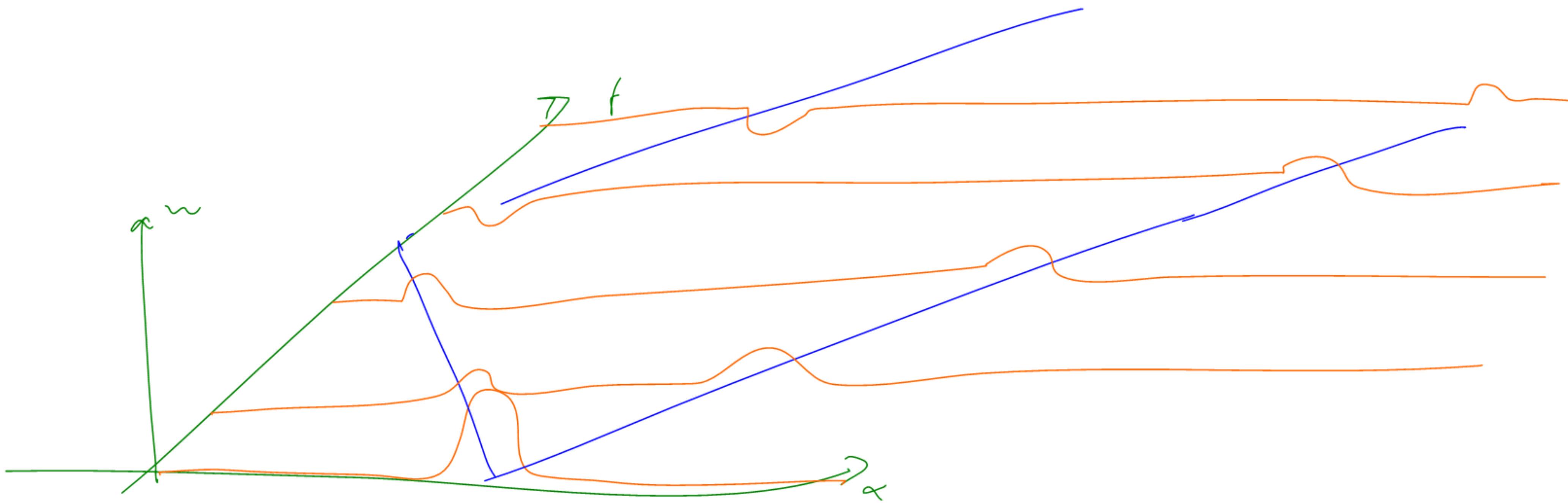
RB irrelevant

denn für positive Argumente stimmen die Funktionen g und $\tilde{g}$ beziehungsweise h und $\tilde{h}$ überein.



2) Ist $0 \leq x \leq t$, so folgt $x - t \leq 0$ und daher

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(\underbrace{x+t}_{\geq 0}) + \tilde{g}(\underbrace{x-t}_{\leq 0})\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{\underbrace{x-t}_{\leq 0}}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(-(x-t))\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{0} \tilde{h}(y)dy + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t-x} h(y)dy + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x+t} h(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{x+t} h(y)dy
\end{aligned}
$$


ω
T
f
x

Anderes Halbraum problem

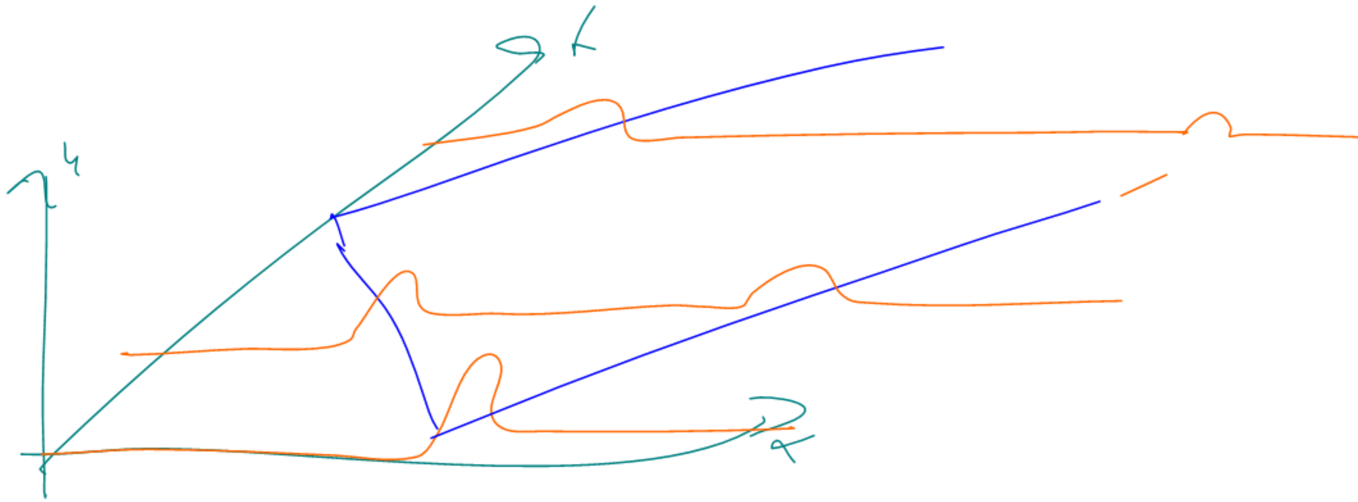
$u_{tt} - u_{xx} = 0$ $\quad \mathbb{R}_+ \times (0,\infty)$

$u = g$ $\quad \mathbb{R}_+ \times \{t=0\}$

$u_t = h$ $\quad$ — " —

$\boxed{u_x(0,t) = 0}$

Lsg: gerade Fortsetzung auf Ganzraum von $h, g \Longrightarrow$



Gesamtlösung:

Wir erhalten also als Lösung des Ausgangsproblems

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy & x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x+t}^{x+t} h(y)dy & 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beispiel:

Die Lösung des ARWP

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = 0,\ u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t))$$

6.2 Lösungen der Wellengleichung durch sphärische Mittelung

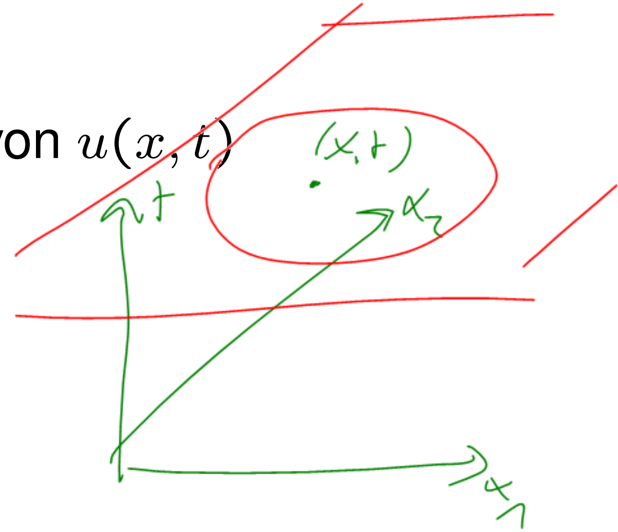
Wir betrachten nun den höherdimensionalen Fall $n \geq 2$ und suchen eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Idee:

Leite durch geeignete **sphärische Mittelungen** eine vereinfachte Differentialgleichung ab, die dann eine explizite Lösungsformel für die höherdimensionale Wellengleichung liefert.

Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definieren wir den **Mittelwert** von $u(x,t)$ über die Sphäre $\partial B(x,r)$,



$$u(x,t) \xleftarrow[u \text{ glatt}]{R \to 0} U(x;r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,dS(y)$$

Weiter sei

$$\begin{cases} G(x;r) & := \fint_{\partial B(x,r)} g(y)dS(y) \\ H(x;r) & := \fint_{\partial B(x,r)} h(y)dS(y) \end{cases}$$

Satz:

Sei $\boxed{x \in \mathbb{R}^n}$ fest und u eine Lösung der obenstehenden Wellengleichung. Dann löst $U(x;r,t)$ die **Euler–Poisson–Darboux Gleichung**

1R Dimension

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \dfrac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ U = G,\, U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

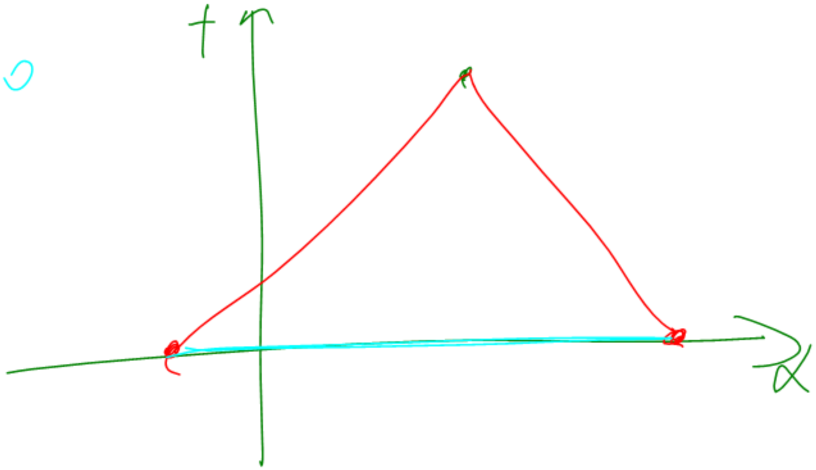
Beweis:

Einer früheren Beobachtung folgend (siehe Seite 71 des Skripts) gilt:

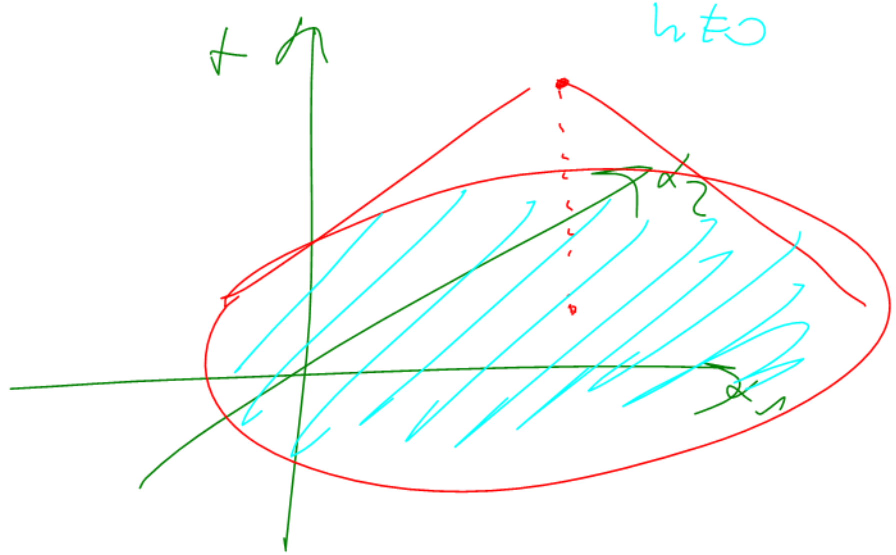
$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy$$

$h=0$

$h \neq 0$



$h \neq 0$



Beweis: (Fortsetzung)

Da u eine Lösung der Wellengleichung ist, folgt

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,dy$$

und damit

$$r^{n-1}U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt}\,dy$$

Daraus folgt aber

$$(r^{n-1}U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}dS = r^{n-1} \fint_{\partial B(x,r)} u_{tt}dS = r^{n-1}U_{tt}$$

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so löst U in der Tat die Gleichung

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0$$

Die Kirchhoffsche Formel für $n = 3$:

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet:

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} \big(th(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\big)\, dS(y) \qquad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0)$$

Herleitung über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung:

Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= rU \\ \tilde{G} &:= rG, \quad \tilde{H} := rH \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\boxed{\tilde{U}_{tt} = \underbrace{rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{\overset{n-1=3-1}{2}}{r}U_r\right)}_{\text{EPD f. } n=3} = rU_{rr} + 2U_r = (\underbrace{U + rU_r}_{(rU)_r})_r = \tilde{U}_{rr}}$$

Also löst $\tilde{U}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G},\ \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r=0\} \times \{t=0\} \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $0 \le r \le t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy$$

Da $U(x;r,t)$ aus $u(x,t)$ durch spärische Mittelung entsteht, gilt

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x;r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r}$$

Mit der Definition von $\tilde{U}$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \left(\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int\limits_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy \right) \\
&= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t)
\end{aligned}
$$

Verwendet man die Definitionen von G und H, so erhält man

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} (tG(x;t)) + tH(x;t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \fint_{\partial B(x,t)} g dS \right) + t \fint_{\partial B(x,t)} h dS
\end{aligned}
$$

Nun gilt

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g dS\right) &= \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+tz)\cdot z dS(z) \\ &= \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right) dS(y) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \fint_{\partial B(x,t)} tDg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right) dS(y) + \fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) \\ &\quad + \fint_{\partial B(x,t)} th dS(y) \end{aligned}$$

und dies ist gerade – nach Umsortierung – die **Kirchhoffsche Formel**.

Die Poissonsche Formel für $n = 2$:

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} dy$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$.

Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das dreidimensionale Anfangswertproblem und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt.

Bemerkung:

Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip, i.e. Verwendung der EPD Gleichung und geeignete Definition von $\tilde{U}$, lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ ableiten.