Aufgabe 1 a): (1+1+1+1 Punkte)

Man kreuze in jeder der Teilaufgaben a) -d) alle wahren (=richtigen) Aussagen an.

a) [x] Wenn ein einfacher Produktansatz keine Lösung liefert, kann ein Ansatz in Form der Summe von Produktansätzen eine Lösung liefern.

[x] Die Fouriermethode kann als verallgemeinerte Produktansatzmethode aufgefasst werden.

[ ] Die Fouriermethode funktioniert gleichermaßen bei linearen wie bei nichtlinearen Problemen.

b) [x] Gleichungen vom Typ $u_t + f(u)_x = 0, \; u(x,0) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R}, \; t \in (0,\infty)$ können in endlicher Zeit unstetig werden.

c) Maximumprinzipien existieren für

[x] die Wärmeleitungsgleichung ohne Quellen,

[ ] alle homogenen parabolischen Gleichungen,

[ ] alle inhomogenen parabolischen Gleichungen.

d) Zum Beweis der Eindeutigkeit bei Anfangsrandwertaufgaben der Wärmeleitungsgleichung (auf beschränktem räumlichen Gebiet) sind folgende Methoden typischerweise hilfreich

[x] Minimumprinzip,

[ ] Charakteristikenmethode,

[ ] Superpositonsprinzip,

[x] Energiemethoden.

Aufgabe 1 b): (1+1+1+1 Punkte)

Man kreuze in jeder der Teilaufgaben a) -d) alle wahren (=richtigen) Aussagen an.

a) Maximumprinzipien existieren für

- [ ] alle inhomogenen parabolischen Gleichungen.
- [x] die Wärmeleitungsgleichung ohne Quellen,
- [ ] alle homogenen parabolischen Gleichungen,

b) [x] Gleichungen vom Typ $u_t + f(u)_x = 0,\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in (0,\infty)$ können in endlicher Zeit unstetig werden.

c)
- [x] Die Fouriermethode kann als verallgemeinerte Produktansatzmethode aufgefasst werden.
- [ ] Die Fouriermethode funktioniert gleichermaßen bei linearen wie bei nichtlinearen Problemen.
- [x] Wenn ein einfacher Produktansatz keine Lösung liefert, kann ein Ansatz in Form der Summe von Produktansätzen eine Lösung liefern.

d) Zum Beweis der Eindeutigkeit bei Anfangsrandwertaufgaben der Wärmeleitungsgleichung (auf beschränktem räumlichen Gebiet) sind folgende Methoden typischerweise hilfreich

- [ ] Charakteristikenmethode,
- [x] Minimumprinzip,
- [x] Energiemethoden,
- [ ] Superpositonsprinzip.

Aufgabe 2: (4+4 Punkte)

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = 2x - 3\,.$$

(i) Man bestimme die charakteristischen Grundkurven und zeichne sie.
Hinweis:
Die allgemeine Darstellung der Grundcharakteristiken darf verwendet werden.

(ii) Man berechne die Lösung des Anfangswertproblems.
Hinweis:
Die implizite Lösungsdarstellung für u darf verwendet werden.

b) Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < 1 \quad \text{und} \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0\,, \quad u(1,t) = 0\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= 2\sin(3\pi x)\,, \quad u_t(x,0) = 12\pi\sin(4\pi x)\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

Lösung:

a) (4 Punkte)

(i) Allgemeine Darstellung der Grundcharakteristiken

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + (2x_0 - 3)t$$

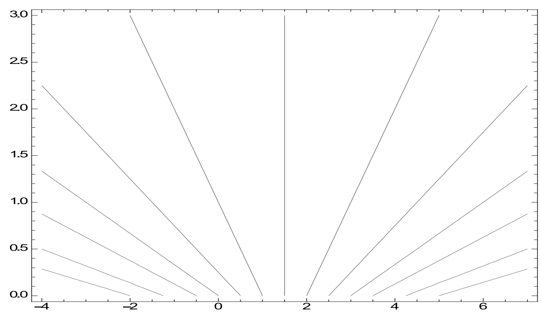

Bild 2 a) (i): $x(t) = x_0 + (2x_0 - 3)t$

(ii) Implizite Lösungsdarstellung:
$u(x,t) = \psi\,(x - u(x,t)\cdot t)$

Anfangsbedingung
$u_0(x) := u(x,0) = 2x - 3$

$$2x - 3 = \psi\,(x - u_0(x)\cdot 0) = \psi(x)$$

$$\Rightarrow \; u(x,t) = 2(x - u(x,t)\cdot t) - 3$$

$$\Rightarrow \; u(x,t) = \frac{2x-3}{2t+1}.$$

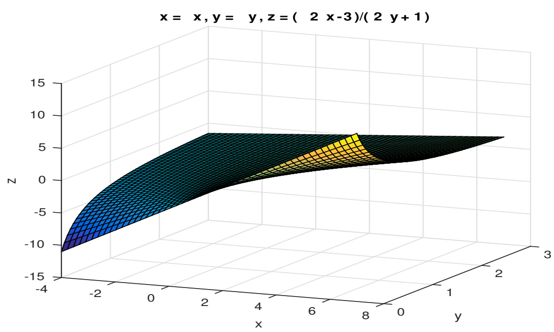

Bild 2 a) (ii): $u(x,t) = \dfrac{2x-3}{2t+1}$
(keine Wertung)

b) (4 Punkte)

Der Produktansatz ergibt für u die Lösungsformel:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)\right) \sin(k\pi x)$$

Mit den Anfangsbedingungen erhält man:

$$2\sin(3\pi x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) \quad \Rightarrow \quad a_3 = 2\,, \quad a_{k\neq 3} = 0$$

$$12\pi \sin(4\pi x) = u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi b_k \sin(k\pi x) \quad \Rightarrow \quad b_4 = 3\,, \quad b_{k\neq 4} = 0$$

Damit erhält man die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$u(x,t) = 2\cos(3\pi t)\sin(3\pi x) + 3\sin(4\pi t)\sin(4\pi x)$$

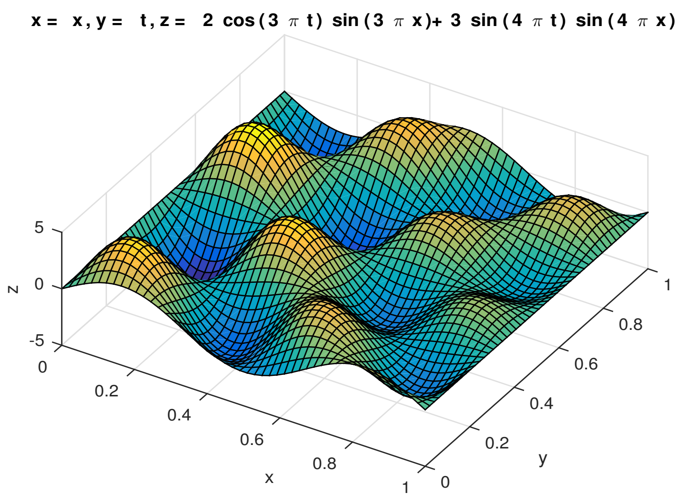

Bild 2 b): $u(x,t) = 2\cos(3\pi t)\sin(3\pi x) + 3\sin(4\pi t)\sin(4\pi x)$
(keine Wertung)

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Für die Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (\pi^2(2t-1)+2)\sin(\pi x) \quad \text{für} \quad 0 < x < 3\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 2\,,\ u(3,t) = -1 \quad \text{für} \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0) &= 2 - x \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 3 \end{aligned}$$

berechne man die Lösung unter Verwendung der Fourier-Methode.

Hinweis: Es darf der Lösungsansatz aus der Fourier-Methode verwendet werden.

Lösung:

Die Lösung des Problems erfolgt in zwei Schritten:

1. Schritt (2 Punkt)
Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$u(0,t) = \varphi_0(t) := 2$ und $u(3,t) = \varphi_1(t) := -1$ wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \left(\varphi_0(t) + \frac{x}{3}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))\right) = u(x,t) - 2 + x$$

in eines mit homogenen Randbedingungen in v transformiert.

Das resultierende Problem in v lautet:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + (\pi^2(2t-1)+2)\sin(\pi x)\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < 3 \quad \text{und} \quad t > 0, \\ v(0,t) &= 0 = v(3,t)\,, \quad \text{für} \quad t \ge 0\,, \\ v(x,0) &= 0\,, \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 3\,. \end{aligned}$$

2. Schritt (6 Punkte)
Lösungsansatz: $v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)$, $v(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_k(0) = 0$

Fourier-Entwicklung der Inhomogenität:

$$(\pi^2(2t+1)+2)\sin(\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) \ \Rightarrow\ f_3(t) = \pi^2(2t-1)+2\,,\ f_{k\neq 3}(t) = 0$$

Aus der Wärmeleitungsgleichung ergibt sich damit insgesamt:

$$\dot a_k(t) + \frac{k^2\pi^2}{9} a_k(t) = f_k(t) \quad \text{mit} \quad a_k(0) = 0.$$

Für $k \neq 3$ erhält man: $\dot a_k(t) + \frac{k^2\pi^2}{9} a_k(t) = 0$ mit $a_k(0) = 0 \ \Rightarrow \ a_k(t) = 0.$

Für $k = 3$ erhält man: $\dot a_3(t) + \pi^2 a_3(t) = \pi^2(2t-1)+2$

Lösung der homogenen Gleichung: $a_{3,h}(t) = c_3 e^{-\pi^2 t}$

spezieller Ansatz für die inhomogene Gleichung $a_{3,p}(t) = at + b$ ergibt

$$\pi^2(at+b) + a = \pi^2(2t-1) + 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2\,,\; b = -1$$

$\Rightarrow \quad a_3(t) = c_3 e^{-\pi^2 t} + 2t - 1 \;\Rightarrow \quad 0 = a_3(0) = c_3 - 1 \;\Rightarrow \quad c_3 = 1$

$\Rightarrow \quad v(x,t) = e^{-\pi^2 t} + 2t - 1$

Die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe lautet:

$$u(x,t) = 2 - x + (e^{-\pi^2 t} + 2t - 1)\sin(\pi x)$$

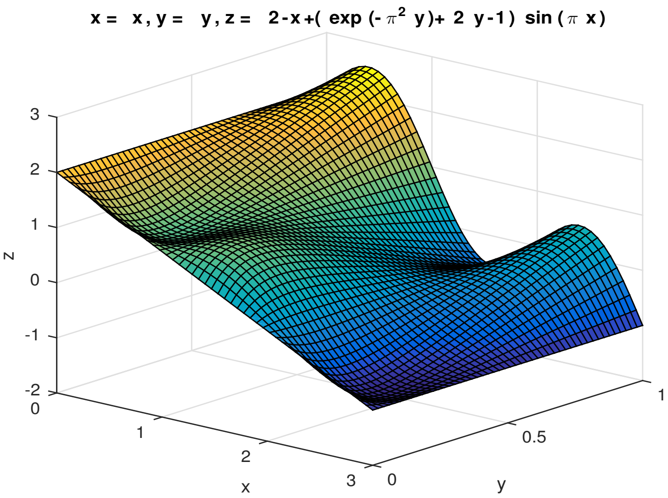

Bild 3 (keine Wertung) Lösung $u(x,t)$