

## Klausur zu Differentialgleichungen II

2. September 2016

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

**Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt  
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.**

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang: 

AI	CI	ET	GE	IN	MTB	MB	SB	VT	andere:
----	----	----	----	----	-----	----	----	----	---------

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)
----------------

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		

$\Sigma =$
------------

**Aufgabe 1:** (1+1+1+1 Punkte)

Man kreuze in jeder der Teilaufgaben a) -d) alle wahren (=richtigen) Aussagen an.

- a)  Mit dem Produktansatz kann man jede partielle Differentialgleichung analytisch lösen.  
 Ein Produktansatz liefert Lösungen bei gewissen partiellen Differentialgleichungen.  
 Ein Produktansatz liefert immer die eindeutige Lösung einer partiellen Differentialgleichung.  
 Falls der Produktansatz keine Lösung liefert, ist die partielle Differentialgleichung unlösbar.
- b)  Gleichungen vom Typ  $u_t + f(u)_x = 0$ ,  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in (0, \infty)$  können mit der Charakteristikenmethode immer gelöst werden.
- c) Maximumprinzipien existieren für  
 die Laplacegleichung,  
 alle homogenen elliptischen Gleichungen,  
 alle inhomogenen elliptischen Gleichungen.
- d) Zum Beweis der Eindeutigkeit bei Anfangsrandwertaufgaben der Wärmeleitungsgleichung (auf beschränktem räumlichen Gebiet) sind folgende Methoden typischerweise hilfreich  
 Maximumprinzip,  
 Reflexionsmethode,  
 Variation der Konstanten,  
 Energiemethoden.

**Aufgabe 2:** (4+4 Punkte)

a) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u_x + 2u_y = 0 \quad \text{mit} \quad u(x, 3x) = x^3 + x$$

unter Verwendung der Charakteristikenmethode.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 25u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= 1. \end{aligned}$$

- (i) Für den Punkt  $(x_0, t_0) = (6, 2)$  gebe man den Abhängigkeitsbereich der Lösung an.
- (ii) Für  $x \in [-10, 20]$  zeichne man den Bestimmtheitsbereich der Lösung für  $t \geq 0$ .
- (iii) Man löse das Anfangswertproblem.

**Aufgabe 3:** (2+6 Punkte)

a) Man schreibe folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise und bestimme den Typ

$$5u_{xx} - 10u_{xt} + 5u_{tt} - 3u_x + u = x + t.$$

b) Gegeben sei das Dirichlet-Problem im Dreiviertelkreis

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für} \quad r < 3 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \frac{3\pi}{2}, \\ u(r, 0) &= 0 = u\left(r, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{für} \quad 0 \leq r \leq 3, \\ u(3, \varphi) &= \varphi(2\varphi - 3\pi) \quad \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

- (i) Man berechne die Lösung  $u$  des Dirichlet-Problems.  
*Hinweis:* Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.
- (ii) Man bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von  $u$ .