Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2016**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25: (Klausur SoSe 06)
Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \sin(x) + t^2\sin(3x)\,, \qquad \text{für} \quad 0 < x < \pi \quad \text{und} \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0 = u(\pi,t)\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= 2\sin(2x)\,, \\ u_t(x,0) &= 4\sin(4x)\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

Aufgabe 26:

Man zeige, dass die Funktion $\qquad u(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$

die Anfangswertaufgabe für die inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten löst:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 27:
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 2x\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= 40\sin x\,, & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten, löse die homogene Differentialgleichung mit Hilfe der d´Alembertschen Lösungsformel und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 28:

a) Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$\begin{aligned} u_{tt} - 9u_{xx} &= 0\,, & x \in \mathbb{R}_+\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= 2x^4\,, & x \geq 0\,, \\ u_t(x,0) &= 12x\,, & \\ u(0,t) &= 0\,, & t > 0 \end{aligned}$$

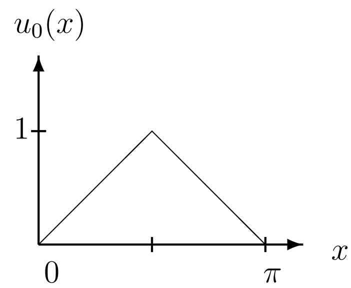
(i) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (7, 1)$ an.

(ii) Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[0, 12]$ für $t \geq 0$.

(iii) Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2-Funktion handelt.

b) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} &&, \quad 0 < x < \pi\,,\ 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(\pi,t) &&, \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) &&, \quad 0 \leq x \leq \pi\,, \\ u_t(x,0) &= 0 &&, \quad 0 \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$



Man berechne die Lösung unter Verwendung der d´Alembertschen Lösungsformel.

Abgabetermin: 11.7.-15.7. (zu Beginn der Übung)

Tutoren gesucht:

Für die Durchführung und/oder Korrektur von Übungen zu Analysis I bzw. Mathematik III im Wintersemester 2016/17 suchen wir noch studentische Tutoren.

Bewerbungen bitte per email an Kai Rothe (rothe@math.uni-hamburg.de) richten mit Namen, Matrikelnummer, Studiengang und bisherigen Klausurergebnissen in Mathematik.