Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2016**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13

Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0\,, \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad u(x,\pi) = 0\,, \quad 0 \le x \le 2\pi \\ u(0,y) &= y(\pi - y)\,, \quad u(2\pi,y) = 0\,, \quad 0 \le y \le \pi\end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 14: (Klausur WiSe 10/11)

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Kreis $r = \sqrt{x^2+y^2} < 7$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0\,,$$

$$u(7,\varphi) = 5 - 28\cos\varphi + 14\sin(2\varphi) + 21\cos(3\varphi)\,,$$

gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Aufgabe 15: (Klausur SoSe 12)

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreisring

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad 1 < r < 3 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi\,,$$

$$u(r,0) = 0 \quad \text{und} \quad u(r,\pi) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \le r \le 3\,,$$

$$u(1,\varphi) = 2\sin(\varphi) \quad \text{und} \quad u(3,\varphi) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \pi,$$

bestimme deren maximalen und minimalen Funktionswert und zeichne sie.

Aufgabe 16:

Für den Kreis sei das innere Neumannsche Randwertproblem gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für} \quad x^2+y^2<R^2\,, \\ \frac{\partial}{\partial r}\,u(R,\varphi) &= v_0(\varphi) && \text{für} \quad \varphi \in [0,2\pi[\,. \end{aligned}$$

a) Man zeige, dass für die Existenz einer Lösung notwendig $\int\limits_0^{2\pi} v_0(\varphi)d\varphi = 0$ gelten muss und dass die Lösung die folgende Form besitzt

$$u(r,\varphi) \;=\; C \;+\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos(k\varphi)+B_k\sin(k\varphi)\right)r^k$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

b) Man berechne und zeichne die Lösung für das Beispiel $R=2$ und

$$v_0(\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi - 4\cos^3\varphi + 3\cos\varphi$$

zunächst in Polarkoordinaten und wandle diese dann anschließend um in kartesische Koordinaten.

Abgabetermin: 30.5.- 3.6. (zu Beginn der Übung)