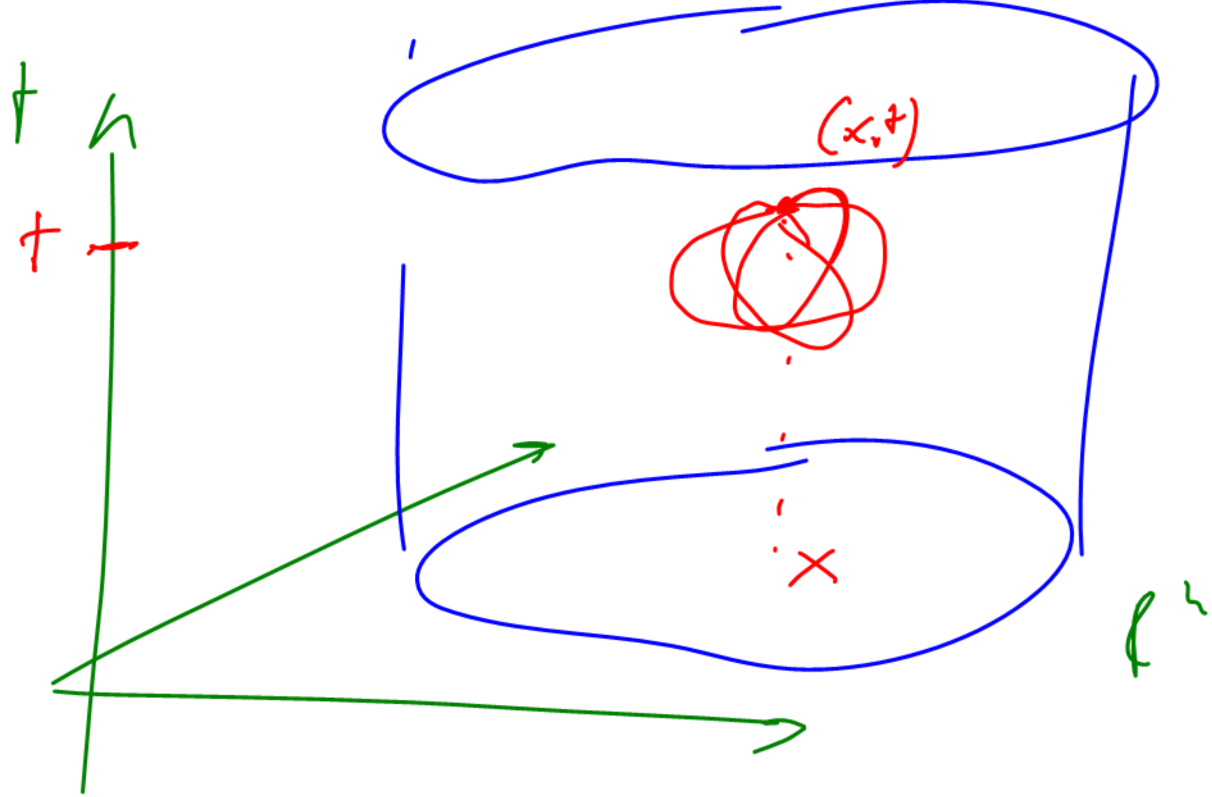


t
t
(x,t)
x

Bemerkung:

1) Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$.

2) Man nennt die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch **Wärmekugel** (heat ball).

Mit Hilfe von $E(\mathbf{x}, t; r)$ erhält man folgende **Mittelwerteigenschaft**:

Satz:

mit x

Ist $u \in C^2_1(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

mit t

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int\limits_{E(\mathbf{x},t;r)} \underline{\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2}} u(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds$$

gewichtete Mittelung

für jede Menge $E(x, t; r) \subset U_T$.

$$1 = \frac{1}{4r^n} \int\limits_{E(x,t;r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \, dy ds$$

Falls $u(x,t)$ ein Max $\Rightarrow$

z.z. $u(y,s) = u(x,t)$

Aus der Mittelwerteigenschaft kann man folgende Maximumprinzipien herleiten.

Satz:

Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T. Dann gilt

1) Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x},t) \in \overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x},t) \in \Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

2) Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x},t) \in \overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t)$$

so folgt, dass u auf $\overline{U}_{t_0}$ konstant ist.

Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

Satz:

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

$u_{1t} - \Delta u_1 = f$
$u_{2t} - \Delta u_2 = f$
$\boxed{(u_1 - u_2)_t - \Delta(u_1 - u_2) = 0}$

auf dem beschränkten Gebiet U mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T) \cap \mathcal{C}(\overline{U_T})$.

$\left.\begin{array}{l} u_1 = g \\ u_2 = g \\ \boxed{u_1 - u_2 = 0} \end{array}\right\} \Gamma_T$

Beweis:

Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen. Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ identisch verschwinden, d.h. wir haben $u = \tilde{u}$.

$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & U_T \\ w = 0 & \Gamma_T \end{cases}$

$w = 0$ Falls $w \neq 0$ Lsg

$\left.\begin{array}{ll} \text{Max P.} & w \leq 0 \\ \text{Min P.} & w \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w \equiv 0$

Energiemethode:
$$u_t - \Delta u = f \quad U$$
$$u = g \quad \Gamma_T$$

Falls u_1, u_2 Lsg. $\Rightarrow$ $w = u_1 - u_2$

$$\underbrace{w_t - \Delta w = 0}_{} \quad U_T$$
$$\underbrace{w = 0}_{} \quad \Gamma_T$$

"energie" $e(t) = \int_U w^2(x,t)\,dx$

$$\dot e(t) = \frac{d}{dt}\int_U w^2(x,t)\,dx = 2\int_U w\, w_t\,dx = 2\int_U w\,\Delta w\,dx =$$

$$= -2\int_U \nabla w\cdot\nabla w\,dx + \underbrace{\int_{\partial U} w\cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial n}}_{n\cdot\nabla w}\,dS}_{=0} = -2\int_U |\nabla w|^2\,dx \le 0$$

$$e(0) = \int_U w^2(x,0)\,dx = 0$$

$\dot e(t) \le 0$

$$\Rightarrow \quad 0 \le e(t) \le e(0) = 0 \quad \Rightarrow e(t) \equiv 0$$
$$\Rightarrow w \equiv 0$$

allgemein:

$$u_t = \Delta u - u + f \qquad U_T$$
$$u = g \qquad \Gamma_T$$

Falls u_1, u_2 Lsg $\qquad w = u_1 - u_2$

$$\boxed{\begin{array}{ll} w_t = \Delta w - w & U_T \\ w = 0 & \Gamma_T \end{array}}$$

gilt Max Prinzip vermutlich nicht

$$e(t) = \int_U w^2 \, dx$$

$$\dot e(t) = 2\int w w_t \, dx = 2 \int w(\Delta w - w)\, dx = -2\int_U |\nabla w|^2 + \cancel{2\int_{\partial U} w \frac{\partial w}{\partial n}\, ds}$$

$$-2\int w^2 \, dx \quad \leq 0$$

$$\ldots \Rightarrow \qquad e(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad w \equiv 0$$

es geht noch mehr:

$$\dot e(t) \leq -2e(t)$$

Satz: Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

auf dem Ganzraum $\mathbb{R}^n$ mit stetigen Funktionen f und g besitzt unter der zusätzlichen Wachstumsbedingung

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2} \qquad (A, a > 0)$$

maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.

Beispiel:

In der Tat kann man zeigen, dass für das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren. Nur die Nulllösung erfüllt die angegebene Wachstumsbedingung; alle anderen Lösungen wachsen rapide an.

$n=1$ Saite

$u_{tt} - u_{xx} = 0$

$n=2$ Membran:

$u_{tt} - \Delta u = 0$

Kapitel 6: Die Wellengleichung

In diesem Kapitel untersuchen wir die **Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

sowie die **inhomogene Wellengleichung** der Form

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

in Verbindung mit geeigneten Anfangs– und Randbedingungen.

Hier bezeichnet $t > 0$ die Zeitvariable und $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.

Wir suchen also eine Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace–Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ wirkt.

Für die inhomogene Gleichung bezeichnet die rechte Seite eine gegebene Funktion $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

6.1 Die Formel von d'Alembert

Wir untersuchen zunächst eine **direkte** Methode zur Lösung des eindimenisonalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei g, h vorgegebene Anfangsbedingungen sind.

Beobachtung:

Die Differentialgleichung läßt auf folgende Weise faktorisieren: es gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u}_{} = u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Setzen wir nun

$$v(x,t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$$

$v_t - v_x = 0$

$u_t - u_x = v$

so erhalten wir eine Transportgleichung mit kostanten Koeffizienten:

$$\boxed{1.\ v_t(x,t) + \cancel{v_x}(x,t) = 0}$$

mit t parametrisieren

$\dot{x}(t) = 1$ $\quad x = t + x_0$

$\hat{v}(t) = v(x(t),t)$

$\dot{\hat{v}}(t) = 0$ $\quad \hat{v}(t) = \hat{v}(0)$

$v(x(t),t) = v(t+x_0,t) =$
$= v(x_0,0)$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$v(x,t) = a(x-t)$$

und erfüllt die Anfangsbedingung

$$v(x,0) = a(x) \qquad a \text{ unbekannt}$$

Wegen

$$v(x,t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$$

ist $u(x,t)$ demnach die Lösung der **inhomogenen** Transportgleichung

$\dot{x} = 1$ $\quad x = x_0 - t$

$\hat{a}(t) = a(x-t) = a(x_0 - t - t)$

$$\boxed{u_t - u_x = a(x-t)} = v(x,t)$$

$\hat{u}(t) = \hat{u}(0) + \int_0^t a(x_0 - 2s)\,ds$

$u(x(t),t) \quad u(x(0),0)$

$x_0 = x+t$

$\boxed{u(x,t)} = u(x(0),0) + \int_0^t a(\underbrace{x_0 - t}_{x} + t - 2s)\,ds = u(x(0),0) + \int_0^t a(x+t-2s)\,ds$

Nach den Methoden aus Kapitel 2 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{0}^{\boxed{t}} a(x+\overbrace{(t-s)-s}^{t-2s})ds + u(\overbrace{x+t}^{x_0},0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\boxed{x-t}}^{x+t} a(y)dy + u(x+t,0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + g(x+t)
\end{aligned}
$$

$x+t-2s = y$

$-2ds = dy$

$s=0 \Rightarrow y = x+t$

$s=t \Rightarrow y = x-t$

Diese Lösung soll nun noch die Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = h(x)$$

erfüllen.

$u_t(x,t) = \frac{1}{2}(a(x+t) + a(x-t)) + g(x+t)$

$u_t(x,0) = \frac{1}{2}(a(x) + a(x)) + g'(x) \overset{!}{=} h(x)$

Man berechnet

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left(a(x+t) + a(x-t)\right) + g'(x+t)$$

und damit

$$u_t(x,0) = a(x) + g'(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a(x) = h(x) - g'(x)}$$

Also folgt

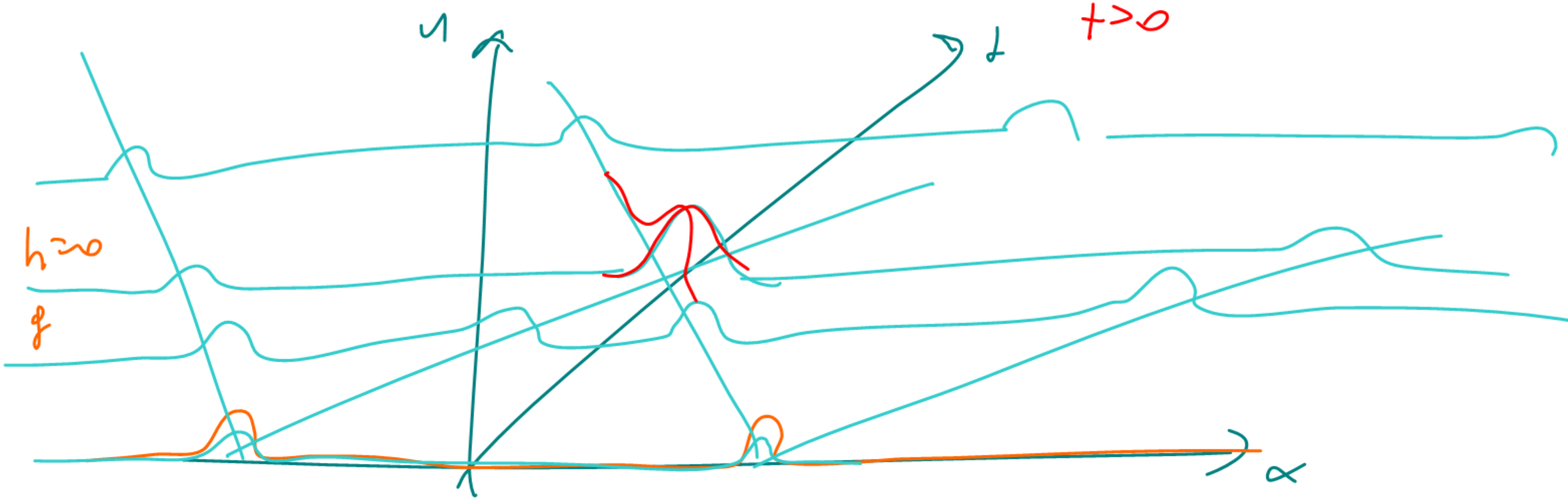
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \Big(h(y) - g'(y)\Big)\,dy + g(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t) \end{aligned}$$

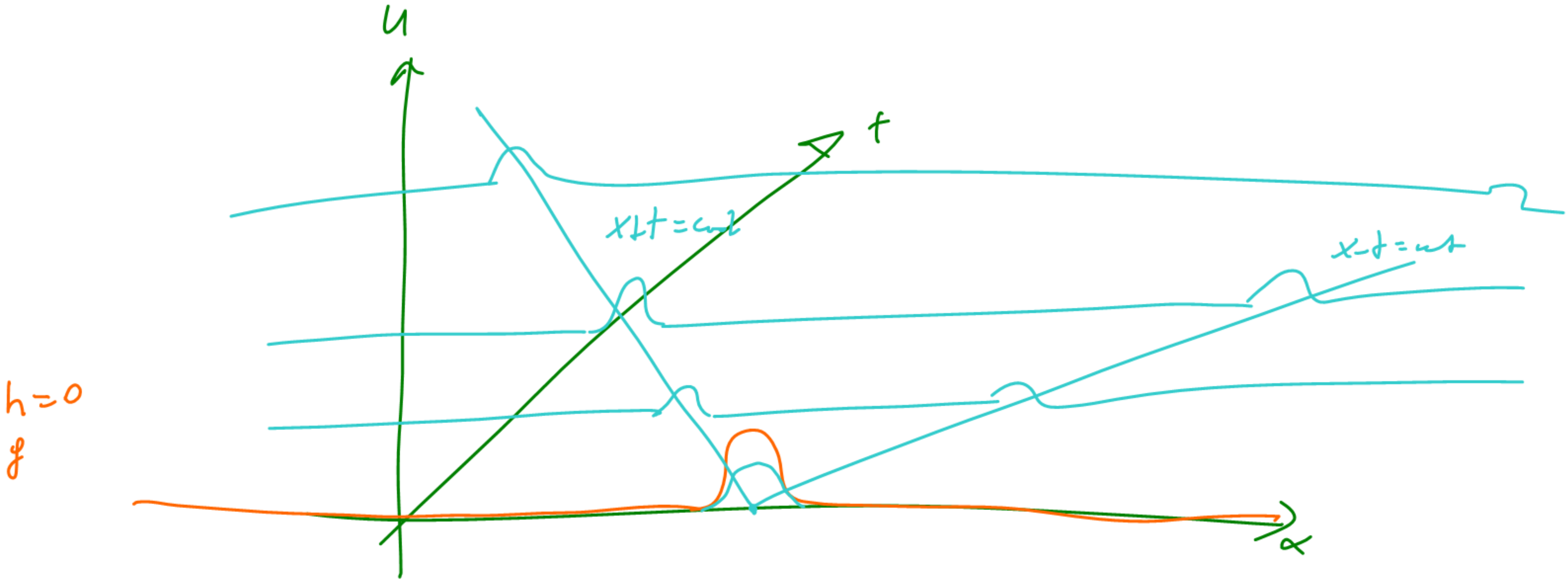
$\nexists$ Maximumprinzip

$u(x,t) = $ lok Max !!

$\exists (x,t)$

$t>0$





$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\cancel{\varphi}(x+t) + \varphi(x-t) \right)$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct) \right)$$

Wir erhalten aus der Beziehung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t)$$

demnach

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy}$$

Diese Darstellung nennt man die **Formel von d'Alembert**.

Bemerkung:

Damit diese Lösung $u(x,t)$ tatsächlich eine **differenzierbare** Lösung der Wellengleichung ist, müssen wir bezüglich der Anfangsbedingungen fordern:

$$g \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R})$$

Beispiel zur Formel von d'Alembert:

Wir betrachten das Cauchy–Problem

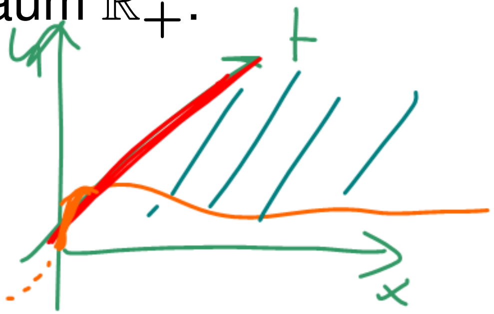
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = \sin x, u_t = \cos x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Nach der Formel von d'Alembert ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos(y)dy \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sin(x+t) - \sin(x-t)) \\ &= \sin(x+t) \end{aligned}$$

Die Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$:

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+$:



$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

Idee:

Erweitere das Halbraumproblem auf ein Ganzraumproblem und verwende die Formel von d' Alembert.

Definiere eine Funktion $\tilde{u}(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ durch

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t) & (x \geq 0, t \geq 0) \\ -u(-x,t) & (x \leq 0, t \geq 0) \end{cases}$$

Analog werden die gegebenen Anfangsdaten **reflektiert**:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die Funktion $\tilde{u}$ das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g},\ \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und nach der Lösungsformel nach d'Alembert gilt

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy$$

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\tilde{g}(t)}_{-\tilde{g}(-t)} + \tilde{g}(-t)\Big) + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)dy}_{=0} = 0$$