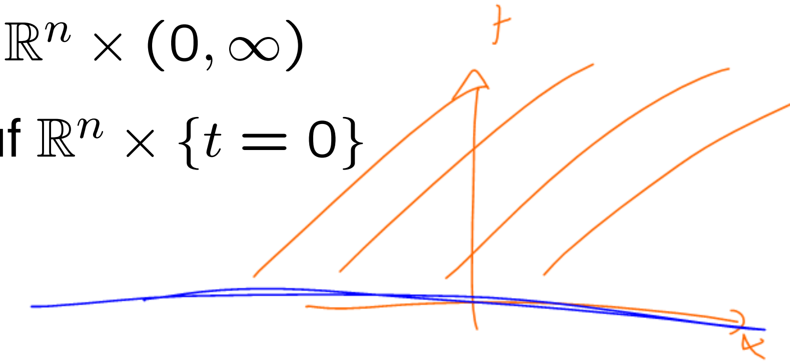
2.2 Anfangswertprobleme bei Gleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun den in Anwendungen häufig auftretenden Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition: Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$



bezeichnet man als ein **Cauchy–Problem**.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Anfangsbedingung

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben.

Die konkreten Lösungen lassen sich dann wiederum mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens berechnen.

Ein typisches **Beispiel** ist die Transportgleichung aus Kapitel 1:

a_0 $(a_1, \dots a_n)$

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

linear

mit dem konstanten Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Verwenden wir hier die Methode der Charakteristiken, so erhalten wir zunächst die $(n+1)$ Differentialgleichungen

$\frac{dx_i}{d\tau} = a_i$ n+1 Gew. DgL

(allg. $\frac{dx}{d\tau} = a(x,t)$) $t = \tau + c$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{a}$$

$= a_0$

ab jetzt: falls $u_t + \dots = 0$

$\frac{dx}{dt} = a$

und wir können ohne Einschränkung $t = \tau$ annehmen.
Die Lösung der zweiten Gleichung lautet dann

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t,$$

mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Die charakteristischen Kurven sind also gerade Geraden, die zur Zeit $t = 0$ den Punkt $\mathbf{x}_0$ durchlaufen und in Richtung $\mathbf{a}$ laufen.

Möchte man die Lösung an einem Punkt $(\mathbf{x}, t)$ bestimmen, so sucht man zunächst die zugehörige Charakteristik, die durch diesen Punkt läuft und den Wert $\mathbf{x}_0$ zur Zeit $t = 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{a}t$$

Da die Lösung entlang der Charakteristiken konstant bleibt, folgt sofort die Lösungsdarstellung

$= u(x_0, 0) = u_0(x_0) =$

Wandernde Welle

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$$

Interpretation dieser Lösung:

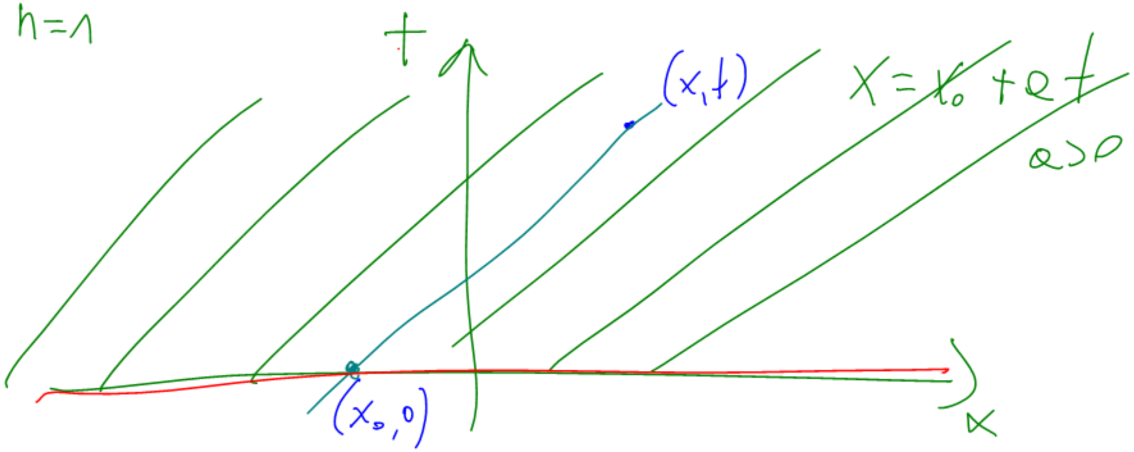
Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ weitertransportiert, ohne seine Form zu ändern.

Probe:

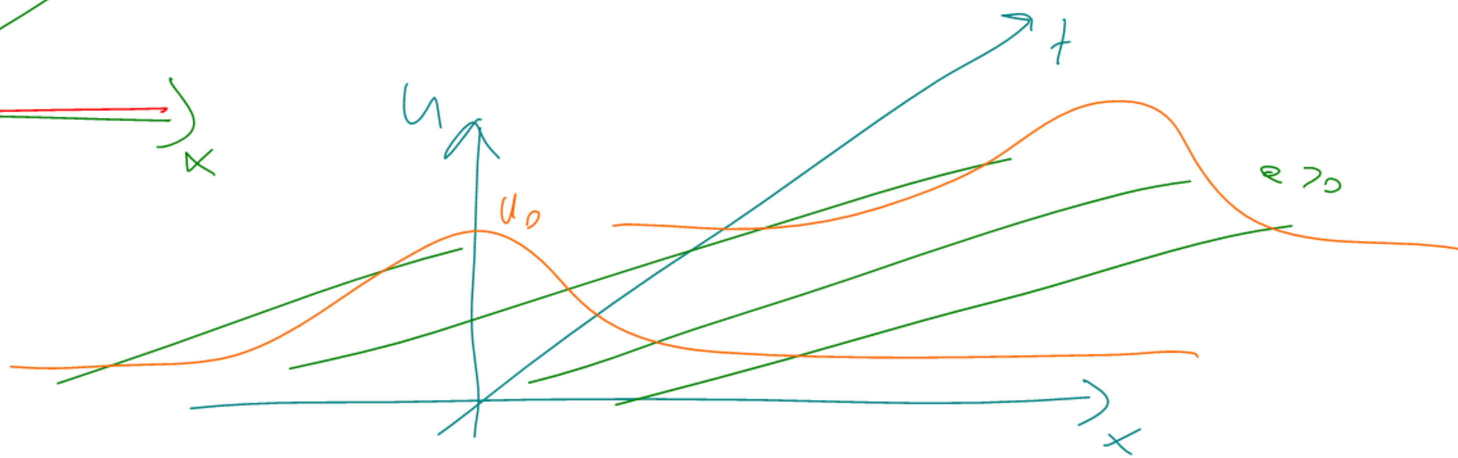
Es gilt:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{a}\nabla u_0, \ \nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla u_0 \quad \Rightarrow \quad u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$$

$n=1$



$n=1$



Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

linear!

$$\begin{cases} u_t + txu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = \sin x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

$u_0(x) = \sin x$

Die charakteristische Gleichung lautet dann

$$\dot{x} = tx, \qquad x(0) = x_0$$

und besitzt die Lösung

$(\ln x)' = \frac{\dot{x}}{x} = t \qquad \ln \frac{x}{x_0} = \frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}$

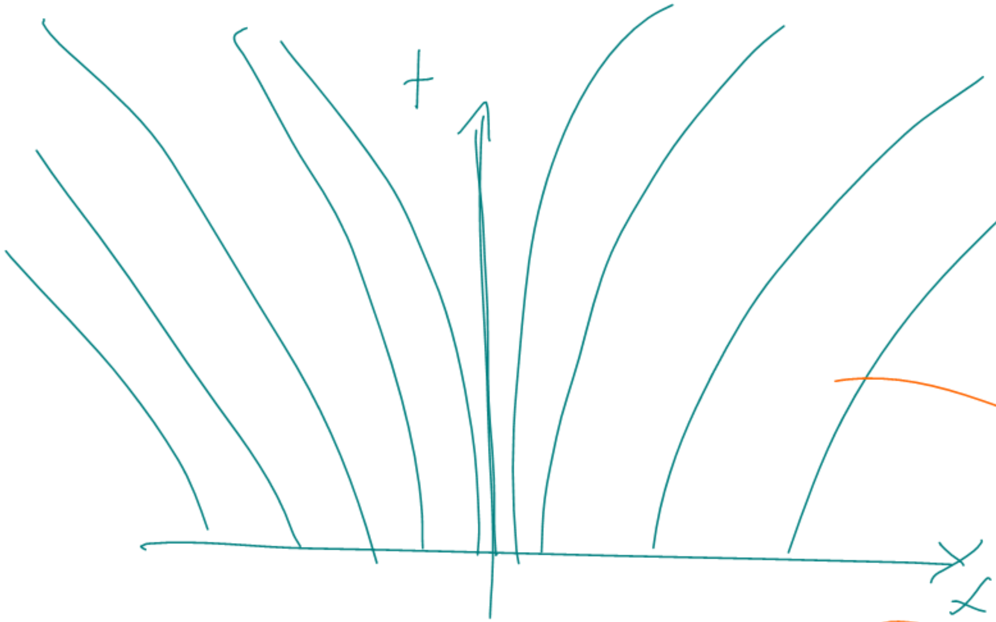
$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

$x_0 = x e^{-\frac{t^2}{2}} \Leftarrow$

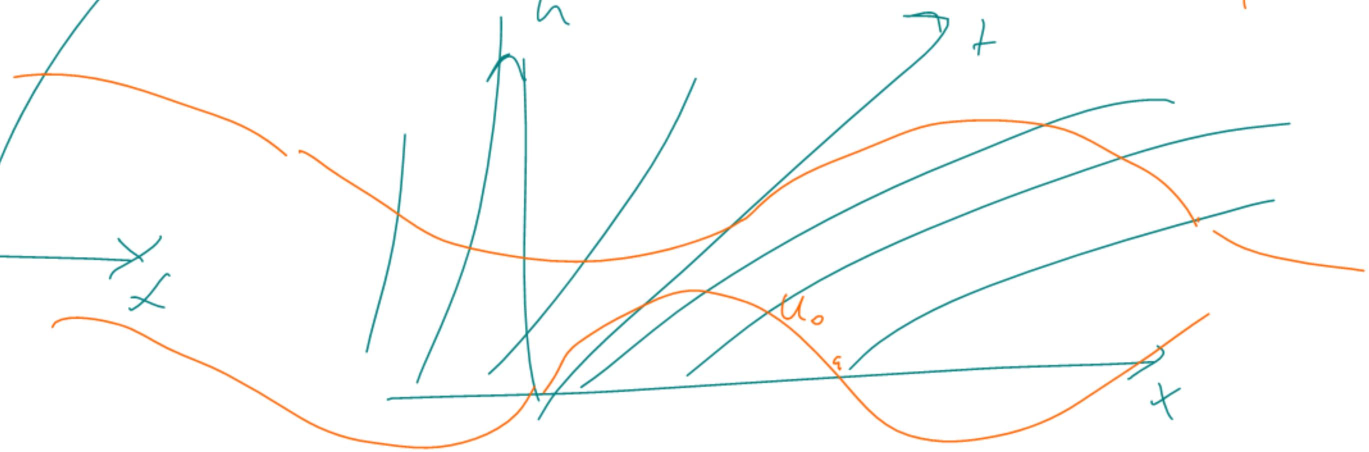
Daraus folgt die Lösungsdarstellung des Anfangswertproblems:

$$u(x,t) = \sin\left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]$$

$u(x,t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0) = \sin x_0 = \sin\left(x e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$



Keine Wanderwelle!



$$u_t + \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot u_{x_i} = 0 \qquad \frac{dx_i}{dt} = a_i \qquad u = u(x(t),t)$$

$$\dot{u} = \frac{d}{dt} u(x(t),t) = u_t + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_{x_i} = \begin{cases} 0 \\ b(x,t,u) \end{cases}$$

Wir kehren zu dem anfangs definierten Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},t,u)u_{x_i} = b(\mathbf{x},t,u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

quasilinear

zurück.

Das charakteristische System lautet dann

Def d. Charakteristik

(gekoppelt x an u wegen quasilinear)

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x},t,u) \\ \dot{u} &= b(\mathbf{x},t,u) \end{aligned}}$$

er gibt sich (siehe oben)

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $u(0) = u_0(\mathbf{x}_0)$.

Dies ist ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem, das unter Umständen nur lokale Lösungen in der Zeit besitzt. Im Allgemeinen wird daher die Methode der Charakteristiken nur lokal in der Zeit eine Lösung liefern.

Vorsicht: das kann an der Methode liegen !!

Beispiel: (für lokale Lösungen in der Zeit)

Eine wichtige Klasse von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung sind die nichtlinearen skalaren Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension.

Das zugehörige Cauchy–Problem lautet:

$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0$

Verkehr

$$\boxed{\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}}$$

Die gegebene Funktion $f = f(u)$ nennt man die **Flußfunktion**.

Solche Differentialgleichungen sind quasilinear, denn eine andere Darstellung der PDE ist

$$u_t + a(u)u_x = 0$$

mit $a(u) = f'(u)$.

Man nennt die Funktion $a(u)$ auch in Analogie zur Transportgleichung die **lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit**.

Verkehr

$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0 \qquad \rho_{max} = 1$$

$$v_{max} = 1$$

$$\rho_t + (1-2\rho)\rho_x = 0 \qquad \Big| \cdot (-2)$$

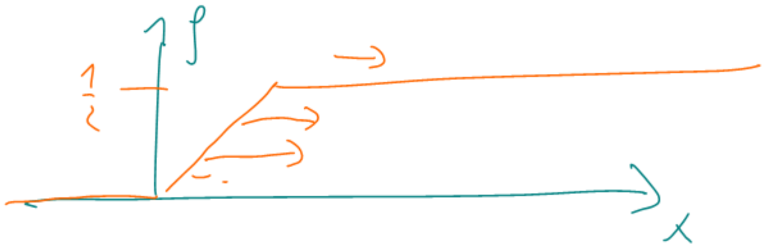
$$u = 1 - 2\rho \qquad u_t = -2\rho_t \quad , u_x = -2\rho_x$$

$$u_t + u u_x = 0$$

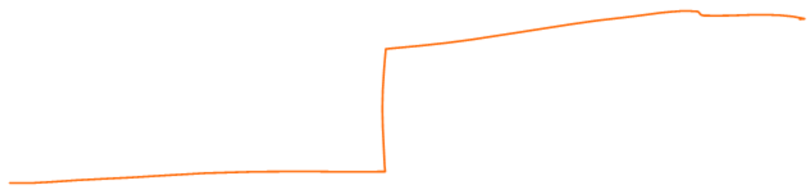
Burgersgleichung!

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

$\rho = 0$	$u = 1$
$\rho = \frac{1}{2}$	$u = 0$
$\rho = 1$	$u = -1$



.....



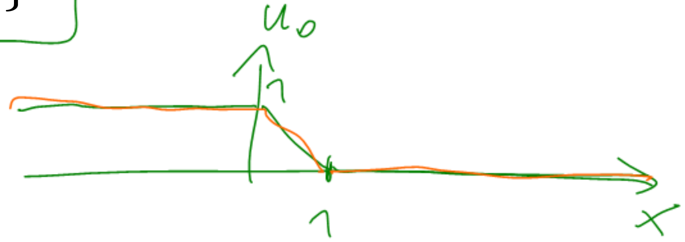
Die wohl berühmteste Erhaltungsgleichung ist die sogenannte **Burgers Gleichung** * mit der Flußfunktion $\boxed{f(u) = u^2/2.}$

$f'(u) = u = c(u)$

Wir betrachten im Folgenden das Cauchy–Problem

$$\boxed{\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}}$$

mit der Anfangsbedingung



$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \le 0 \\ 1 - x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \ge 1 \end{cases}$$

und verwenden die Methode der Charakteristiken, um die Lösung zu bestimmen.

Die charakteristische Gleichung lautet

charakteristik

$$\dot{x} = u, \qquad x(0) = x_0$$

$u(x(t),t) = u(x_0)$

Vorsicht x Gleichung ist nicht von u entkoppelt

$$\boxed{x = x(t) = u_0(x_0) \cdot t + x_0}$$

Gerade

$u = u(x,t)$ $\quad u_t = \frac{\partial}{\partial t} u$

$\dot{u} = \frac{d}{dt} u(x(t),t)$

$\dot{u} = 0$

*Johannes Martinus Burgers, 1895–1981, niederländischer Physiker

$0 = \dot{u} = \frac{d}{dt} u(x(t),t) \Rightarrow u(x(t),t) = u(x(0),0) = u_0(x(0)) = u_0(x_0)$

Da die Lösung der Burgers Gleichung entlang der Kurve $x(t)$ konstant bleibt, gilt

$$\dot{x} = u_0(x_0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + t\boxed{u_0(x_0)}$$

Das sieht zwar harmlos aus, ist es aber keineswegs!

Mit der gegebenen Anfangsbedingung $u_0(x)$ erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} 1 \cdot t + x_0 & : \quad x_0 \leq 0 \\ (\underline{1 - x_0})t + x_0 & : \quad 0 < x_0 < 1 \\ 0 \cdot t + x_0 & : \quad x_0 \geq 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der charakteristischen Kurven:

Singularität der Lösung:

Zur Zeit $t = 1$ laufen unendlich viele Kurven durch den Punkt $x = 1$, d.h. im Punkt $(x, t) = (1, 1)$ ist die Lösung nicht mehr eindeutig.

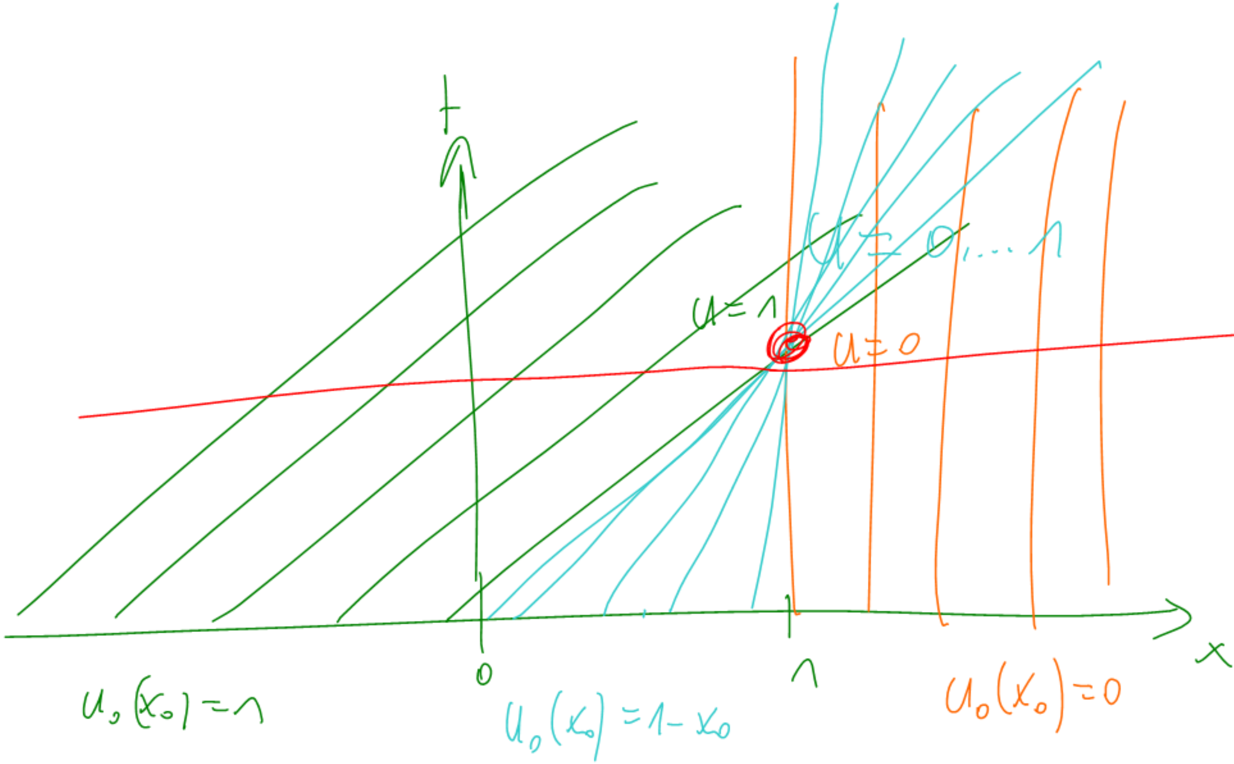
In der Tat existiert die (klassische) Lösung der Burgers Gleichung mit der angegebenen Anfangsbedingung nur **lokal** in der Zeit für $0 \leq t < 1$.

Für $t \in [0, 1)$ ist die Lösung gegeben durch

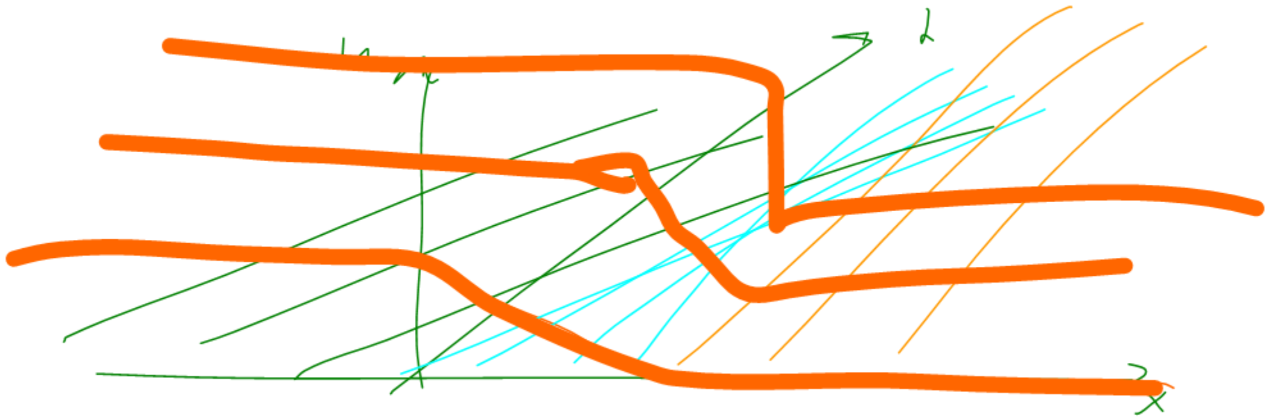
$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \ x < t \\ (1-x)/(1-t) & : \ 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : \ x > 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der Lösung für verschiedene $t \in [0, 1)$:

Lösung macht keinen Sinn !!



!



2.3 Skalare Erhaltungsgleichungen

Das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

hat im Allgemeinen keine globale Lösung.

Die Burgers Gleichung aus dem letzten Abschnitt mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0 \\ 1 - x & : \quad 0 < x < 1 \\ 0 & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

besitzt nur auf dem Zeitintervall $[0, 1)$ die klassische Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < t \\ (1-x)/(1-t) & : \quad 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

Was passiert für $t \geq 1$?

Zunächst: Funktionen mit kompaktem Träger

e^x, $\sin x$, $\ln x$

keinen kompakten Träger

Definition:

Der **Träger einer Funktion** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

Ist der Träger einer Funktion kompakt, so sprechen wir von einer **Funktion mit kompaktem Träger**.

Bemerkung:

Es gibt (viele) differenzierbare, ja sogar unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger. Diese spielen in der modernen Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen eine entscheidende Rolle.

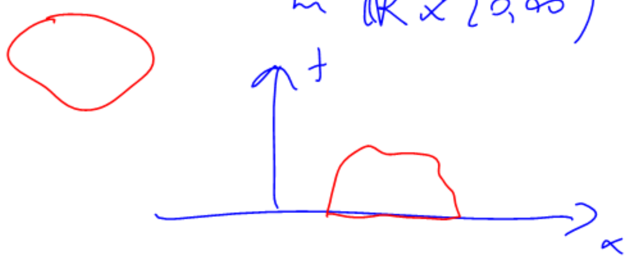
Was passiert für $t \geq 1$?

Motivation:

Sei $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger.

Multiplizieren wir $u_t + f(u)_x = 0$ mit v und integrieren über $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, so erhalten wir

v kompakt ?
in $\mathbb{R} \times [0,\infty)$



$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x)\, v dx dt \quad = (*)$$

$$(*) \quad = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t dx dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x dx dt$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ ergibt sich

$$\boxed{\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x)\, dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dx = 0 \quad \forall v \text{ komp. T.}}$$

versch.

$\boxed{\begin{array}{l} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array}}$ klassisch

$$(*) = -\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty u v_t \,dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty u(x,\infty)\underbrace{\cancel{v(x,\infty)}}_{=0}\,dx - \int_{-\infty}^\infty u(x,0)\,v(x,0)\,dx$$

$$-\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(u) v_x \,dx\,dt + \int_0^\infty u(-\infty,t)\underbrace{\cancel{v(-\infty,t)}}_{=0}\,dt - \int_0^\infty u(+\infty,t)\underbrace{\cancel{v(+\infty,t)}}_{=0}\,dt$$

V Kompakt Tr.

Definition:

Eine differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger nennt man auch eine **Testfunktion.**

Definition:

beschränkt

Eine Funktion $\boxed{u \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, \infty))}$ nennt man eine **Integrallösung** ~~oder **schwache Lösung**~~, falls die Beziehung

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (uv_t + f(u)v_x)\, dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)v(x, 0) dx = 0$$

für alle Testfunktionen v erfüllt ist.

klassische Lsg $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ schwache Lsg

Bemerkung:

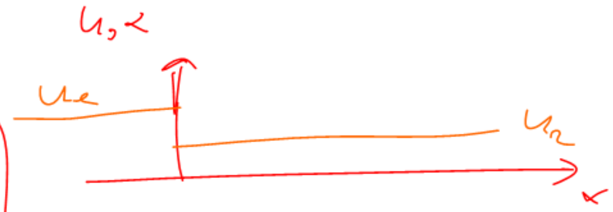
Eine Integrallösung muß **keine** differenzierbare Funktion sein, sondern kann sogar **Sprungstellen** besitzen.

Definition: Das Anfangswertproblem

Spezialfall

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung



$$\boxed{u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}}$$

nennt man ein **Riemannproblem** für skalare Erhaltungsgleichungen.

Beispiel: Ein Riemannproblem für die **Burgers Gleichung** lautet

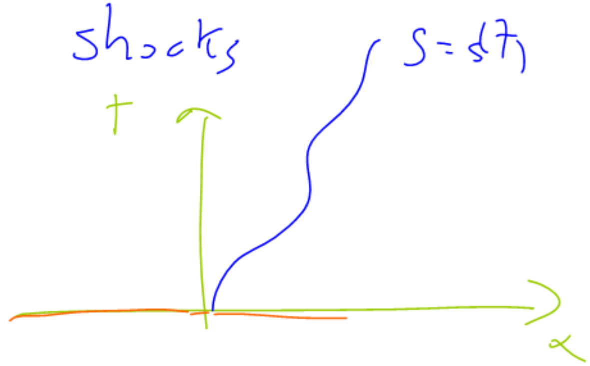
$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

Was sind in diesem Fall die Integrallösungen?

1) **Stoßwellenlösung** bei der Burgers Gleichung



Für $u_l \neq u_r$ ist die sogenannte Stoßwelle

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq s(t) \\ u_r & : \quad x > s(t) \end{cases}$$

eine Integrallösung.

Dabei bezeichnet die Funktion $s(t)$ die Lage der **Stoßfront**, d.h. der Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle.

Die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$ wobei

$$\dot{s}(t) = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

und $s(0) = 0$ ist.

Diese Beziehung nennt man die **Rankine–Hugoniot Bedingung**.

Was sind in diesem Fall die Integrallösungen?

2) **Verdünnungswelle** bei der Burger's Gleichung

Für $u_l < u_r$ ist die sogenannte Verdünnungswelle eine Integrallösung:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq u_l\, t \\ \dfrac{x}{t} & : \quad u_l\, t \leq x \leq u_r\, t \\ u_r & : \quad x \geq u_r\, t \end{cases}$$

Man beachte, dass die Lösung $u(x,t)$ eine **stetige** Funktion ist.

Die Lösung ist entlang der Geraden $x = u_l\, t$ und $x = u_r\, t$ aber **nicht** differenzierbar und daher nur eine Integrallösung.

Bemerkung:

Für $u_l < u_r$ stellt sich die Frage, welche der Lösungen (Stoßwelle oder Verdünnungswelle) physikalisch von Bedeutung ist. Es wird sich zeigen, dass nur die Verdünnungswelle relevant ist.

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Definition:

Eine Stoßwellenlösung u ist eine Integrallösung der Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

wenn eine sogenannte Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, sodass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PDE ist und u bei $x = s(t)$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t)$$

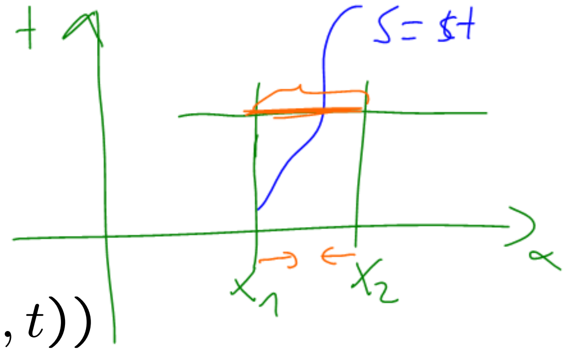
besitzt. Die Größe $\dot{s}(t)$ nennt man die Stoßgeschwindigkeit.

Satz:

Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}$ die **Rankine–Hugoniot Bedingung**

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t)}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)}$$

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung



Eine Integrallösung erfüllt die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(\xi,t)d\xi = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

Wählen wir $x_1 < s(t) < x_2$ so folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{s(t)} u(\xi,t)d\xi + \int_{s(t)}^{x_2} u(\xi,t)d\xi\right) = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t))$$

Da $u(x,t)$ für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ nach Definition eine differenzierbare Lösung ist, können wir unter den beiden Integralen ableiten:

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\xi + \dot{s}\,u(s(t)^-,t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\xi - \dot{s}\,u(s(t)^+,t) + f_2 - f_1 = 0$$

Also

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi + \dot{s}\, u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$

mit

$$f_1 := f(u(x_1, t)), \qquad f_2 := f(u(x_2, t))$$

Im Grenzfall $x_1 \to s(t)^-$ und $x_2 \to s(t)^+$ verschwinden die Integrale und wir erhalten

$$\dot{s}\, u(s(t)^-, t) - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) = f(u(s(t)^-)) - f(u(s(t)^+))$$

Dies ist aber gerade die Rankine–Hugoniot Bedingung in der Form

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]}$$

Beispiel

Wir betrachten die Burgers Gleichung mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \le 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

und $u_l > u_r$.

Die Rankine–Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{u_l^2/2 - u_r^2/2}{u_l - u_r} = \frac{(u_l - u_r)(u_l + u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung dieses Problems

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \le \frac{1}{2}(u_l + u_r)\, t \\ u_r & : \quad x > \frac{1}{2}(u_l + u_r)\, t \end{cases}$$

$u_l = 1$

$u_r = 0$

$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}$