

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5

Aufgabe 17:

Für den Kreis sei das innere Neumannsche Randwertproblem gegeben:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{für } x^2 + y^2 < R^2, \\ \frac{\partial}{\partial r} u(R, \varphi) &= v_0(\varphi) && \text{für } \varphi \in [0, 2\pi[.\end{aligned}$$

- a) Man zeige, dass für die Existenz einer Lösung notwendig $\int_0^{2\pi} v_0(\varphi) d\varphi = 0$ gelten muss und dass die Lösung die folgende Form besitzt

$$u(r, \varphi) = C + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)) r^k$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

- b) Man berechne und zeichne die Lösung für das Beispiel $R = 2$ und

$$v_0(\varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi - 4 \cos^3 \varphi + 3 \cos \varphi$$

zunächst in Polarkoordinaten und wandle diese dann anschließend um in kartesische Koordinaten.

Aufgabe 18:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} && \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) &= e^{4x} && \text{für } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- a) unter Verwendung der Fundamentallösung und
b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 19: (Klausur WiSe 12/13)

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für } 0 < x < 2, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= x(2-x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ u(0, t) &= 0 = u(2, t) \quad \text{für } 0 \leq t \end{aligned}$$

und bestimme deren maximalen Funktionswert und zeichne eine Näherungslösung.

Aufgabe 20:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u && \text{für } (x, y) \in]0, \pi[\times]0, \pi[, \quad 0 < t, \\ u(0, y, t) &= 0 = u(\pi, y, t) && \text{für } y \in [0, \pi], \quad 0 \leq t, \\ u(x, 0, t) &= 0 = u(x, \pi, t) && x \in [0, \pi], \quad 0 \leq t, \\ u(x, y, 0) &= 5 \sin 3x \sin 4y && \text{für } (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ &\quad - 8 \sin x \cos x \sin y \cos y \quad . \end{aligned}$$

Man zeichne die Lösung u für $t = 0, \frac{1}{100}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$?

Abgabetermin: 3.6.-6.6. (zu Beginn der Übung)