Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2014**
Prof. Dr. R. Lauterbach
Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2$ invariant gegenüber Verschiebungen ist, d.h. für die um $(a, b)^T$ verschobenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad &\text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (y+3)^2 < 4\,, \\ u(x,y,z) = xyz \quad &\text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4 \end{aligned}$$

den Wert $u(-1, 2, -3)$.

Aufgabe 14:

Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad u(x,\pi) = 0\,, \quad 0 \le x \le 2\pi \\ u(0,y) &= y(\pi - y)\,, \quad u(2\pi, y) = 0\,, \quad 0 \le y \le \pi \end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 15: (Klausur WiSe 10/11)

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Kreis $r = \sqrt{x^2 + y^2} < 7$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \,,$$

$$u(7, \varphi) = 5 - 28 \cos\varphi + 14 \sin(2\varphi) + 21 \cos(3\varphi) \,,$$

gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Aufgabe 16: (Klausur SoSe 12)

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreisring

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad & \text{für} \quad 1 < r < 3 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi \,, \\ u(r, 0) = 0 \quad \text{und} \quad u\,(r, \pi) = 0 \quad & \text{für} \quad 1 \leq r \leq 3 \,, \\ u(1, \varphi) = 2 \sin(\varphi) \quad \text{und} \quad u(3, \varphi) = 0 \quad & \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{aligned}$$

bestimme deren maximalen und minimalen Funktionswert und zeichne sie.

Abgabetermin: 20.5.- 23.5. (zu Beginn der Übung)