

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $5u_x + yu_y + e^x u = \sin x$,

(ii) $uu_x + u_y + 4u = (x + y + u)^2$,

(iii) $u_{xx}u_{yy} - 3u_x + u = 0$,

(iv) $\Delta u - u^2 u_x = 0$,

(v) $\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$.

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $v_1(x, y) = x^2 - y^2$,

(ii) $v_2(x, y) = e^y \sin x$

(iii) $v_3(x, y) = \operatorname{Re}(\sin z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2:

Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

a) $u_{xx} - y^2 u = -yx + y^3$,

b) $u_{xy} = 3x^2 + 3y^2$,

c) $u_{xy} = 2yu_x$.

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

a) $u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t}$ für $u_t = u_{xx} + u$,

b) $u(r, \varphi) = e^{\alpha \ln r + \beta \varphi}$ für $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$,

c) $u(t, x, y) = e^{\alpha t + \beta x + \gamma y}$ für $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$.

Aufgabe 4:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$2v_t + 5v_x = 12tx + 15t^2, \quad v(0, x) = \cos(2x)$$

und zeichne die Lösung.

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} r &= at + bx \\ s &= ct + dx \end{aligned}$$

mit $ad - bc \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Abgabetermin: 8.4.-11.4.2014 (zu Beginn der Übung)